ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΙΙ

ΠΑΚΕΤΟ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ

ΜΕΡΟΣ Ι: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΧΑΡΙΛΑΟΣ Ν. ΨΑΡΑΥΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2007

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΚΔΟΣΗ 2007

Το παρόν πακέτο σημειώσεων, *Οικονομική Θαλασσίων Μεταφορών ΙΙ -Μέρος Ι: Μεθοδολογία Θεωρίας Αποφάσεων*, προορίζεται ως βοήθημα του ομώνυμου προπτυχιακού μαθήματος της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Το μάθημα αυτό είναι κατ' επιλογήν υποχρεωτικό στο 8ο εξάμηνο του προπτυχιακού προγράμματος, και είναι το μεσαίο μάθημα σειράς τριών μαθημάτων, τα οποία περιλαμβάνουν το υποχρεωτικό μάθημα της Οικονομικής Θαλασσίων Μεταφορών Ι (7ο εξάμηνο) και το κατ' επιλογήν υποχρεωτικό μάθημα Οικονομική Θαλασσίων Μεταφορών ΙΙΙ: Περιβαλλοντική Ανάλυση και Ασφάλεια (9ο εξάμηνο). Αυτά τα τρία μαθήματα εντάσσονται στο ευρύτερο φάσμα των προπτυχιακών μαθημάτων που προσφέρει η επιστημονική περιοχή των Θαλασσίων Μεταφορών στη Σχολή.

Από το ακαδημαϊκό έτος 2006-2007, η ύλη του μαθήματος αυτού αποτελεί επικαιροποίηση και αναβάθμιση του πακέτου σημειώσεων που μοιράζεται κάθε χρόνο στους σπουδαστές (τελευταία έκδοση: 2001) και περιλαμβάνει, εκτός από το παρόν, και το βιβλίο μου «Ελληνική Ακτοπλοΐα και cabotage» (Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 2006). Η ύλη που μοιράζεται δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να υποκαταστήσει όλα όσα παρουσιάζονται στην τάξη, και τα οποία μόνο με τη συστηματική παρουσία του σπουδαστή μπορούν να γίνουν επαρκώς αντιληπτά. Περισσότερα για την ευρεία αυτή περιοχή και τις σχετικές δραστηριότητες στο ΕΜΠ, περιλαμβανόμενων και όλων των μαθημάτων που προσφέρει η περιοχή των Θαλασσίων Μεταφορών, καθώς και σχετικών συνδέσμων, ερευνητικών προγραμμάτων και βιβλιογραφίας, μπορούν να βρεθούν στο δικτυακό τόπο του Εργαστηρίου Θαλασσίων Μεταφορών www.martrans.org .

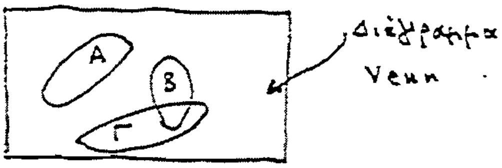
Η δομή του Μέρους Ι σε πολλά σημεία βασίζεται σε εκείνη του βιβλίου του πρώην συναδέλφου μου στο Department of Ocean Engineering του MIT J.W. Devanney III με τίτλο «Marine Decisions Under Uncertainty» (MIT Press, 1967). Σκοπός της είναι η μεθοδολογική επέκταση των «ντετερμινιστικών» εννοιών που πραγματεύεται το μάθημα «Οικονομική Θαλασσίων Μεταφορών Ι» με την ποσοτική θεώρηση της αβεβαιότητας που υπάρχει στην οικονομική και διοίκηση της ναυτιλίας, καθώς και βασικών εννοιών στη λήψη αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητας. Η βασική έννοια του ρίσκου και η στάση του λήπτη των αποφάσεων απέναντι στο ρίσκο παρουσιάζονται και σχολιάζονται, το ίδιο δε συμβαίνει με μεθόδους βελτιστοποίησης και λήψης σειράς αποφάσεων όπως δυναμικός προγραμματισμός.

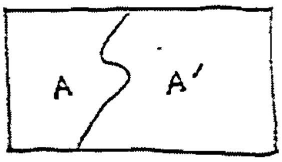
Όπως και στην Οικονομική Θαλασσίων Μεταφορών Ι, έτσι και εδώ, η σαφής «ποσοτική» προσέγγιση που ακολουθείται είναι συμβατή με το ισχυρό αναλυτικό υπόβαθρο των σπουδαστών του ΕΜΠ. Παρ' όλα αυτά, μια βασική γνώση θεωρίας πιθανοτήτων και (δευτερευόντως) επιχειρησιακής ερευνάς και βελτιστοποίησης θεωρείται απαραίτητη ώστε ο σπουδαστής να μπορέσει να προχωρήσει με άνεση στα θέματα που πραγματεύεται το παρόν.

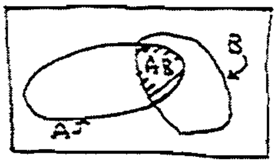
Αθήνα, Ιανουάριος 2007

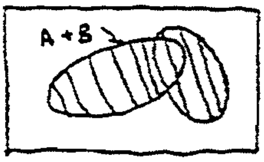
Χαρίλαος Ν. Ψαραύτης
Καθηγητής, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Μελέτης Πλοίου και Θαλασσίων Μεταφορών
Εργαστήριο Θαλασσίων Μεταφορών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

0. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ









Γεγονός: Μία σαφώς ορισμένη έκβαση (ή σύνολο δυνατών εκβάσεων) ενός πειράματος.

Πείραμα: Μία διαδικασία της οποίας οι δυνατές εκβάσεις δεν είναι γνωστές με βεβαιότητα.

U: Συνολικό (παγκόσμιο) γεγονός: Η συλλογή όλων των δυνατών εκβάσεων ενός πειράματος.

A': το συμπλήρωμα του A: η συλλογή όλων των δυνατών εκβάσεων στο U που δεν ανήκουν στο A.

Τομή (AB) των A, B: η συλλογή όλων των εκβάσεων που ανήκουν και στο A και στο B.

Ένωση (A+B) των A, B: η συλλογή όλων των εκβάσεων που ανήκουν είτε στο A είτε στο B (είτε και στα 2).

- 2 ή περισσότερα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ λέγονται αμοιβαία αποκλειστικά αν $A_iA_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$.
- 2 ή περισσότερα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ λέγονται συλλογικά εξαντλητικά αν κάθε γεγονός στο U ανήκει σε τουλάχιστον 1 από αυτά (ή αν $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$)
- Αξιώματα της άλγεβρας των γεγονότων

$A + B = B + A$ $\qquad$ $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$

$A + (B+\Gamma) = (A+B) + \Gamma \; (= A + B + \Gamma)$ $\qquad$ $(A')' = A$ $\qquad \Rightarrow$

$(AB)' = A' + B'$ $\qquad\qquad$ $AU = A$

$AA' = \emptyset$

<u>Ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος</u>

Ἡ πιθανότητα $p(A)$ ἑνὸς γεγονότος A ποὺ εἶναι ἔκβαση ἑνὸς <u>σαφῶς ὁρισμένου</u> πειράματος εἶναι ἕνας <u>ἀριθμός</u>, ποὺ χαρακτηρίζει πόσο πιθανό εἶναι νὰ εἶναι τό A ἡ ἔκβαση τοῦ πειράματος αὐτοῦ.

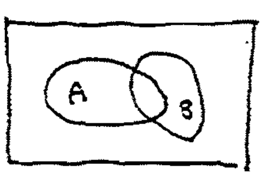
Ἡ $p(A)$ ὑπακούει στὰ ἑξῆς 3 ἀξιώματα:

- $p(A) \geq 0$
- $p(U) = 1$
- Ἂν $AB = \emptyset \Rightarrow p(A+B) = p(A) + p(B)$

<u>Παρατήρηση</u>: Ὁ πιὸ πάνω ὁρισμὸς ΔΕΝ μᾶς λέει οὔτε ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ A, οὔτε πῶς νὰ τὴ βρίσκουμε. Γενικά, 2 διαφορετικὰ ἄτομα μποροῦν νὰ ἔχουν 2 διαφορετικὲς γνῶμες (ἐκτιμήσεις) γιὰ τὴν τιμὴ τῆς $p(A)$. Ἡ πιθανότητα <u>πάντοτε</u> περιέχει ὑποκειμενικὲς ἐκτιμήσεις.

<u>Ἡ πιθανότητα σὰν "συχνότητα"</u>: Πολλὲς φορὲς ἡ πιθανότητα <u>ἑρμηνεύεται</u> καὶ σὰν συχνότητα, πχ ἡ πιθανότητα νὰ ἔρθει κορώνα ἕνα νόμισμα εἶναι ὁ λόγος n_k/N ὅπου n_k εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκβάσεων "κορώνα" σὲ N πειράματα, ὅπου τὸ N εἶναι μεγάλο. Ἐπειδὴ ὁρισμένα πειράματα γίνονται μόνο 1 φορά, ἡ πιὸ πάνω ἑρμηνεία πολλὲς φορὲς <u>δὲν</u> ἰσχύει καὶ καλύτερα νὰ ἀποφεύγεται.

<u>Ὑπὸ ὅρους (δεσμευμένη) πιθανότητα</u>



Ἔστω 2 γεγονότα A, B, μὲ $B \neq \emptyset$

Ὁρισμός: $$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$$

<u>Ἀνεξάρτητα γεγονότα</u>: Τὰ A, B εἶναι <u>ἀνεξάρτητα</u> ἂν $p(A|B) = p(A)$.

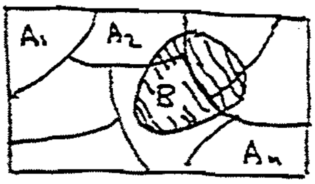
Τότε $p(AB) = p(A)p(B)$

<u>Κανόνας (ή θεώρημα) Bayes</u>

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)\,p(A)}{p(B)}$$

<u>Γενίκευση</u> : $A_1, \dots, A_n$: αμοιβαία αποκλειστικά και συλλογικά εξαντλητικά

B : κάποιο γεγονός



Τότε
$$\boxed{p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)\,p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j)\,p(A_j)}}$$
ΚΑΝΟΝΑΣ BAYES

<u>Συνήθης ερμηνεία</u> (χρήση):

- A_i : αντιπροσωπεύει μιά συγκεκριμένη "κατάσταση της φύσης" : δυνατή έκβαση ενός πειράματος.
- B : πειραματική έκβαση ενός <u>τεστ</u> που σκοπό έχει να εκτιμήσει πόσο πιθανή είναι η A_i.

Συνήθως <u>ξέρουμε</u> τις πιθανότητες:

- $p(B|A_i)$: ΕΑΝ ισχύει η A_i, ποιά είναι η πιθανότητα η έκβαση του τεστ να είναι η B.
- $p(A_i)$: <u>αρχική</u> μας (υποκειμενική) εκτίμηση για το πόσο πιθανή είναι η A_i.

και θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα

- $p(A_i|B)$: πιθανότητα να ισχύει η A_i αν συμβεί η B.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> (υποθετική έρευνα πετρελαίου)

2 δυνατές καταστάσεις φύσης : A_1 : ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟ $p(A_1)=0{,}4$

A_2 : ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ $p(A_2)=0{,}6$

Τεστ : Σεισμική δόνηση. 2 δυνατές εκβάσεις : B : "ΘΕΤΙΚΟ"

B' : "ΑΡΝΗΤΙΚΟ"

Ξέρουμε επίσης ότι:

- αν υπάρχει πετρέλαιο, το τεστ θα βγει θετικό με πιθανότητα 0,8 και αρνητικό με πιθανότητα 0,2 (τεστ όχι τέλειο).
- αν δεν υπάρχει πετρέλαιο, το τεστ θα βγει θετικό με πιθανότητα 0,1 και αρνητικό με πιθανότητα 0,9.

Θέλουμε τις πιθανότητες

p(ΠΕΤΡΕΛΑΙΟ | "ΘΕΤΙΚΟ"), p(ΠΕΤΡΕΛΑΙΟ | "ΑΡΝΗΤΙΚΟ") κτλ.

$p(B|A_1)=0,8 \qquad p(B'|A_2)=0,9$

$p(B'/A_1)=0,2 \qquad p(A_1)=0,4$

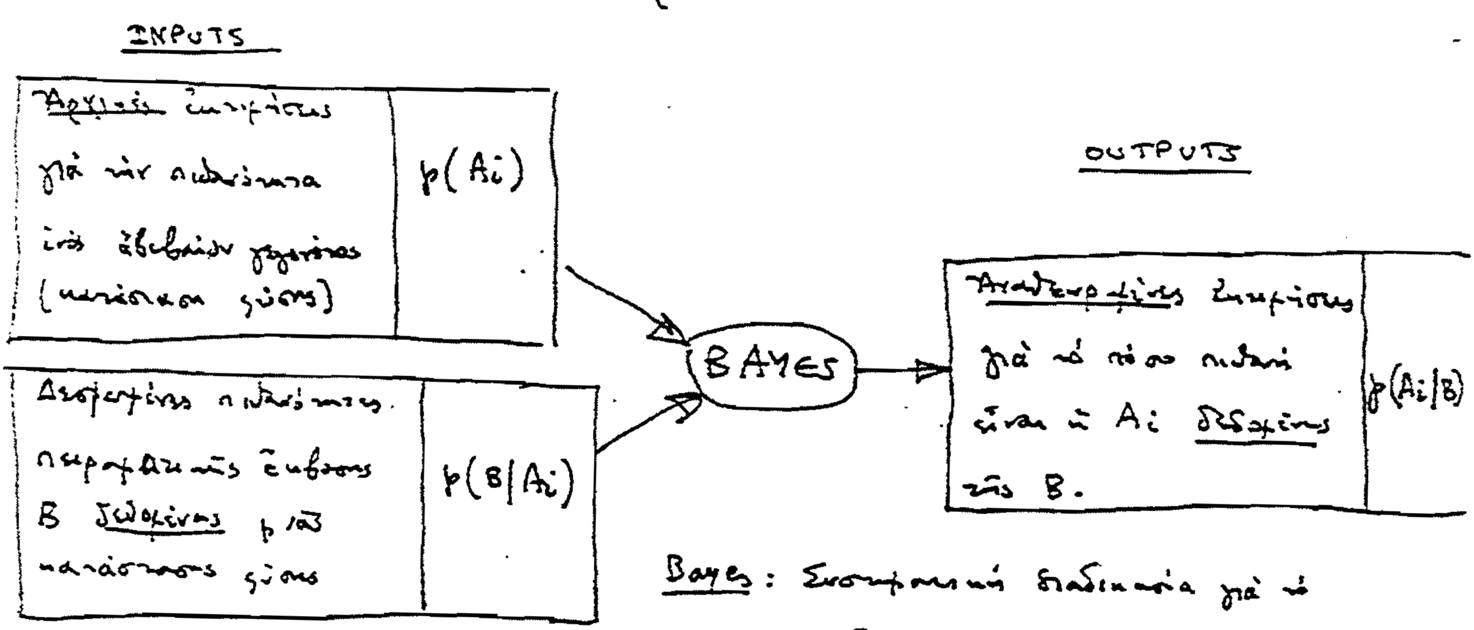
$p(B|A_2)=0,1 \qquad p(A_2)=0,6$

Bayes: $$p(A_1|B)=\frac{p(B|A_1)\,p(A_1)}{p(B|A_1)\,p(A_1)+p(B|A_2)\,p(A_2)}=0,89$$

$$\Rightarrow p(A_2|B)=0,11$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $p(A_1|B')=0,13$ και $p(A_2|B')=0,87$

Γενικότερα



Bayes: Συστηματική διαδικασία για το συνδυασμό της υποκειμενικής πληροφόρησης ($p(A_i)$) με την αντικειμενική ($p(B|A_i)$)

1. <u>ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ</u>: <u>"ΤΟ ΠΛΟΙΟ-ΕΥΚΑΙΡΙΑ"</u>.

Τό "πλοῖο-εὐκαιρία" εἶναι ἕνα πλοῖο 20 χρόνια πού κοστίζει $10.000.000. Τό ἴδιο πλοῖο καινούργιο κοστίζει $11.000.000, δηλαδή ὁ πλοιοκτήτης μπορεῖ νά κερδίσει $1.000.000 ἄν τό "πλοῖο εὐκαιρία" δέν παρουσιάζει πρόβλημα. Δυστυχῶς, προτοῦ προβεῖ στήν ἀγορά, ὁ πλοιοκτήτης μαθαίνει ὅτι τά 80% παρομοίων τέτοιων πλοίων εὐκαιρίας παρουσιάζουν κάποιο "μικρό" πρόβλημα (περίπτωση Α) καί τό ὑπόλοιπο 20% παρουσιάζουν κάποιο "μεγάλο" πρόβλημα (περίπτωση Β). Στήν περίπτωση Α, 1 ἀπό τά 10 συστήματα τοῦ πλοίου (ἠλεκτρικό, στρόβιλος, πηδάλιο, κλπ) εἶναι χαλασμένο, καί ἐπισκευάζεται ἔναντι $400.000. Στήν περίπτωση Β, 6 ἀπό τά 10 συστήματα εἶναι χαλασμένα, καί ἐπισκευάζονται ἔναντι $2.000.000. Τό ζητούμενο εἶναι: <u>Μέ βάση τά πιό πάνω δεδομένα, καί χωρίς ἄλλη πληροφόρηση, ἀξίζει ὁ πλοιοκτήτης νά ἀγοράσει τό πλοῖο-εὐκαιρία;</u>

(<u>Σημ.</u>: Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι ὑπερ-ἁπλουστευμένο. Στήν πραγματικότητα τέτοια προβλήματα εἶναι πολύ πιό πολύπλοκα. Ἀρχίζουμε ὅμως ἀπό αὐτό, καί σιγά-σιγά θά ἐξετάσουμε πιό πολύπλοκα προβλήματα).

<u>Προκαταρκτικές σκέψεις</u>: Ὁ πλοιοκτήτης προφανῶς μπορεῖ νά <u>μήν</u> ἀγοράσει τό πλοῖο-εὐκαιρία. Τότε θά ἀγοράσει τό καινούργιο, καί δέν θά κερδίσει <u>τίποτα</u> ὡς πρός τήν τιμή ἀγορᾶς. Ἄν ὅμως ἀποφασίσει νά <u>ἀγοράσει</u> τό πλοῖο-εὐκαιρία, τότε μπορεῖ νά κερδίσει $600.000, ἄν τοῦ τύχει ἡ περίπτωση Α ($1.000.000 σκόντο στήν τιμή – $400.000 οἱ ἐπισκευές) ἤ μπορεῖ νά χάσει $1.000.000, ἄν τοῦ τύχει ἡ περίπτωση Β ($1.000.000 – $2.000.000 οἱ ἐπισκευές).

Ἡ <u>γενική μεθοδολογία</u> ἐπίλυσης προβλημάτων λήψης ἀποφάσεων ὑπό ἀβεβαιότητα εἶναι :

① Προσδιορισμός ἐπιλογῶν

② Προσδιορισμός πιθανοτήτων γιά ἀβέβαια γεγονότα

③ Ποσοτικός προσδιορισμός προτιμήσεων γιά τίς δυνατές ἐκβάσεις

④ Σύνθεση

Στό πρόβλημά μας :

① Ὑπάρχουν 2 ἐπιλογές : E_1 : Ἀγορά πλοίου εὐκαιρίας
E_2 : Μή ἀγορά πλοίου εὐκαιρίας

② Ἀβέβαια γεγονότα. Ἐδῶ ὑπάρχουν 2 περιπτώσεις (καταστάσεις φύσης)

περίπτωση A : Πλοῖο εὐκαιρία ἔχει 1 στά 10 χαλασμένα $p(A) = 0,8$

περίπτωση B : — " — " — " — 6 — " — " — $p(B) = 0,2$

③ Ποσοτικές ἐπιπτώσεις :

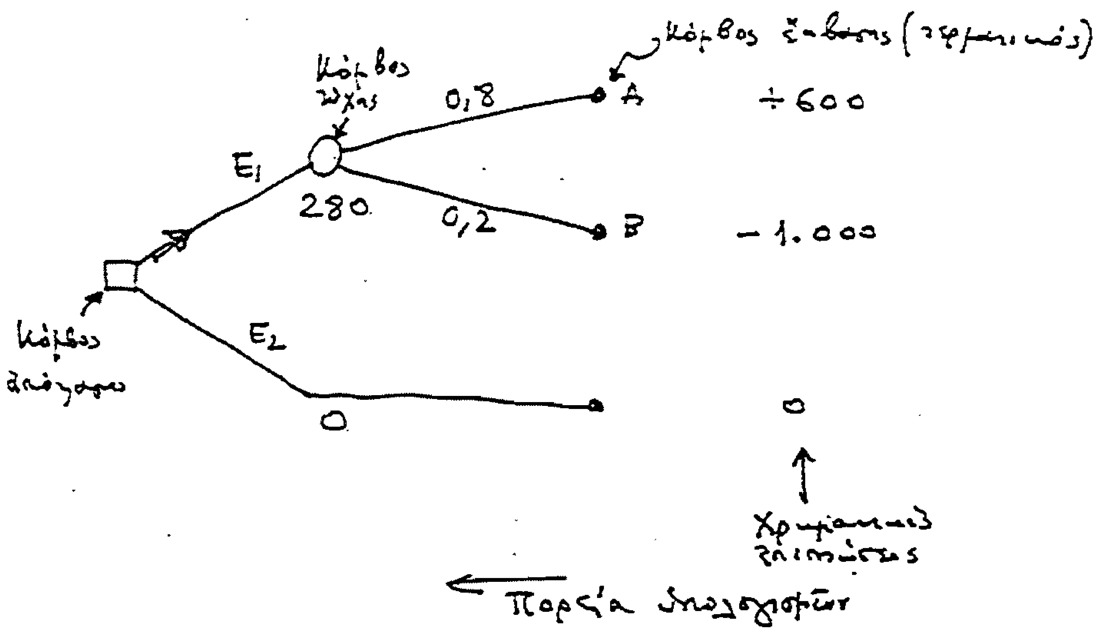
Πίνακας χρηματικοῦ ἀποτελέσματος (σέ χιλιάδες δολ)

	E_1	E_2
A	600	0
B	-1.000	0

(πάντα μέ βάση (0) τό ὅτι ἀγοράζει τό καινούργιο πλοῖο)

<u>Προτιμήσεις</u> : Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι ὁ λήπτης ἀποφάσεων ἐπιδιώκει νά μεγιστοποιήσει τό <u>προσδοκώμενο χρηματικό του ἀποτέλεσμα</u> (κέρδος). (<u>Σημ</u>: Ἡ παραδοχή αὐτή εἶναι πολύ σημαντική, καί <u>δέν</u> ἰσχύει ἀναγκαστικά στήν πράξη, ἤ γιά ὅλους. Προϋποθέτει αὐτό πού ἀργότερα θά ὁρίσουμε σάν "<u>οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου</u>" ἀπό τόν λήπτη τῶν ἀποφάσεων, κάτι πού μπορεῖ καί νά μήν ἰσχύει. Ἐπίσης ἡ λέξη "προσδοκώμενο" εἶναι ἀπό τήν <u>πιθανοτική</u> ἔννοια (Προσδοκώμενο = ἀναμενόμενο = μέση τιμή).

④ Σύνθεση. Γίνεται μέ τό δέντρο τών αποφάσεων, ως εξής:



Τό προσδοκώμενο χρηματικό αποτέλεσμα γιά τίς 2 επιλογές είναι:

E_1: $0{,}8 \times 600 + 0{,}2 \times (-1000) = 280$ (χιλ. \$)

E_2: 0

$\boxed{\text{Άρα η } E_1 \text{ είναι η καλύτερη επιλογή } (\nearrow \text{ βέλος})}$

Σημ 1: Άν X είναι η τυχαία μεταβλητή τού χρηματικού αποτελέσματος στήν E_2, τότε $E[X] = 280$, αλλά $\sigma_X = 640$!
Αυτό σημαίνει ότι τό 280 είναι απλώς ένας μέσος όρος, καί ότι η πραγματική έκβαση μπορεί νά απέχει πολύ από τόν μέσο όρο αυτό (εδώ, η πραγματική έκβαση είναι 600 ή −1.000).

Σημ 2: "Καλή απόφαση $\not\Leftrightarrow$ Καλή έκβαση" σέ προβλήματα υπό αβεβαιότητα! Πράγματι, ενώ η "καλή απόφαση" εδώ είναι η E_1, εγγύηση ότι θά υπάρξει καί καλή έκβαση δέν υπάρχει.

<u>Χρήση καί ἀξία τῆς πληροφόρησης</u>

Τμῆμα τῆς δυσκολίας γιά τόν γεωτρυπητή εἶναι ὅτι <u>δέν ξέρει</u> τήν πραγματική "κατάσταση τῆς φύσης", δηλαδή ἄν τό κτῆμα-εὐκαιρία εἶναι A ἤ B. Ξέρει μόνο τό 80% - 20%.

Ἐάν <u>ἤξερε</u> (δηλ. εἶχε τέλεια πληροφόρηση), τά πράγματα θά ἦταν ἁπλά:

- Ἄν ἤξερε ὅτι τό κτῆμα εἶναι A, τότε θά τό ἀγόραζε, καί τό κέρδος του θά ἦταν 600 (χιλ. $)
- Ἄν ἤξερε ὅτι τό κτῆμα εἶναι B, τότε δέν θά τό ἀγόραζε, καί τό κέρδος του θά ἦταν 0.

Τό ποσό $600 \times 0,8 + 0 \times 0,2 = 480$ εἶναι ἡ <u>προσδοκώμενη τιμή τοῦ κέρδους του κάτω ἀπό τέλεια πληροφόρηση</u> (καί <u>πρωτοῦ</u> λάβει τήν πληροφόρηση αὐτή). ΠΡΟΣΟΧΗ

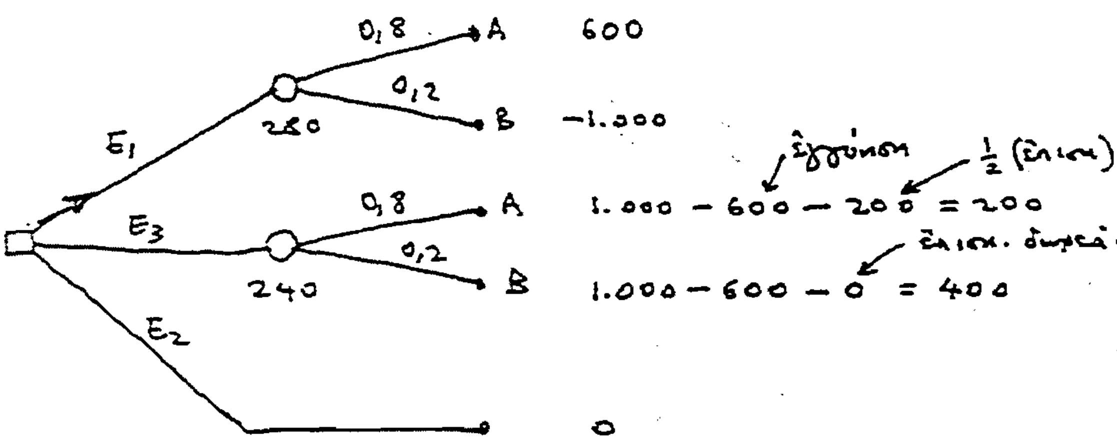
Κάτω ἀπό μή τέλεια πληροφόρηση (βλ. πρίν), τό προσδοκώμενο κέρδος του ἦταν 280.

Ἡ διαφορά $480 - 280 = 200$ (χιλ. $) ὀνομάζεται <u>προσδοκώμενη τιμή τῆς τέλειας πληροφόρησης</u> (ΠΤΤΠ). Τό ποσό αὐτό εἶναι τό <u>μέγιστο</u> πού θά ἦταν διατεθειμένος νά πληρώσει γιά νά ἀποκτήσει αὐτή τήν τέλεια πληροφόρηση. Μιά τέτοια τέλεια πληροφόρηση θά τοῦ αὔξανε τό <u>προσδοκώμενο</u> κέρδος κατά 200 (χιλ. $). Θά τοῦ αὔξανε τό <u>πραγματικό</u> κέρδος κατά 600 (ἐάν ἡ πληροφόρηση ἔλεγε ὅτι τό κτῆμα εἶναι A) ἤ κατά 0 (ἐάν ἔλεγε ὅτι ἦταν B). Προφανῶς, ἐάν κάποιος τοῦ "πουλοῦσε" τήν τέλεια πληροφόρηση, θά ἀπαιτοῦσε πληρωμή ΠΡΟΤΟΥ τοῦ τήν δώσει (ἐξ οὗ καί τό βάρος στήν προσδοκώμενη τιμή τοῦ κέρδους <u>πρωτοῦ</u> δοθεῖ ἡ τέλεια πληροφόρηση).

Παραλλαγή τοῦ προβλήματος. Ἡ ἐγγύηση.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ὁ πλοιοκτήτης ἀνακαλύπτει ὅτι ὑπάρχει ἡ δυνατότητα ἀγορᾶς ἐγγύησης γιά τό πλοῖο-θαλαμηγία. Ἡ ἐγγύηση κοστίζει 600 (χιλ $) καί καλύπτει ὅλο τό κόστος τῶν ἐπισκευῶν ἄν αὐτό εἶναι ≥ 1.000 (χιλ $), ἤ τό μισό κόστος ἐπισκευῶν ἄν αὐτό εἶναι < 1.000 (χιλ $). Συμφέρει νά πάρει τήν ἐγγύηση; (πάντα μέ τούς ἴδιους ὅρους ὅπως καί πρίν, καί ὑπό τά ἴδια δεδομένα πληροφόρησης).

Νέο δέντρο ἀποφάσεων (E_3: ἐπιλογή ἐγγύησης)



⇒ Καί πάλι καλύτερη ἐπιλογή εἶναι ἡ E_1 (προσδ. κέρδος = 280)

Ποιά ὅμως εἶναι τώρα ἡ ΠΤΤΠ;

Βρίσκουμε πρῶτα τό προσδοκώμενο κέρδος κάτω ἀπό τέλεια πληροφόρηση:

- Ἄν A ⇒ ἀγορά χωρίς ἐγγύηση (E_1) καί κέρδος = 600
- Ἄν B ⇒ ἀγορά μέ ἐγγύηση (E_3) καί κέρδος = 400

Προσδ. κέρδος κάτω ἀπό τέλεια πληροφόρηση $= 600 \times 0,8 + 400 \times 0,2 = 560$

(πρoτοῦ μάθει τήν πληροφόρηση!)

Ἄρα ΠΤΤΠ = 560 − 280 = 280 (χιλ. $).

Βλέπουμε ὅτι ἡ ΠΤΤΠ ἀνέβηκε (ἕνεκα τῆς προσφερομένης). Παρ' ὅλον ὅτι ἡ ἐγγύηση δέν ἐνδείκνυται, ἡ ὕπαρξή της ἀνέβασε τήν

ΠΤΤΠ διότι μέ τήν ἐγγύηση ὑπάρχει μεγίστη δυνατότητα ἐπιστρέψεως τῆς τελείας πληροφόρησης. Ἔτσι, ἄν κάποιος προσφέρει τέλεια πληροφόρηση μέ κόστος 250 (χιλ. $), πρίν δέν ἄξιζε, ἐνῶ τώρα ἀξίζει.

<u>Κεντρικό συμπέρασμα</u>: Η πληροφόρηση ἔχει πάντα κάποια ἀξία, εἴτε χρησιμοποιηθεῖ, εἴτε ὄχι.

Γεννᾶται ὅμως τό ἐρώτημα γιά τήν ἀξία τῆς <u>μερικῆς</u> (ὄχι τέλειας) πληροφόρησης. Αὐτό θά ἐξετασθεῖ ἀργότερα πιό κάτω.

<u>Ἄλλη παραλλαγή: Τό τέστ</u>

Γιά νά μήν εἶναι ἐντελῶς στό σκοτάδι, ὁ πλοιοκτήτης σκέφτεται νά κάνει ἕνα τέστ (τεχνικό ἔλεγχο), ὥστε νά μάθει περισσότερα γιά τό πλοῖο-εὐκαιρία.

Υποθέτομε ὅτι ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς ἐπιλογές τέστ:

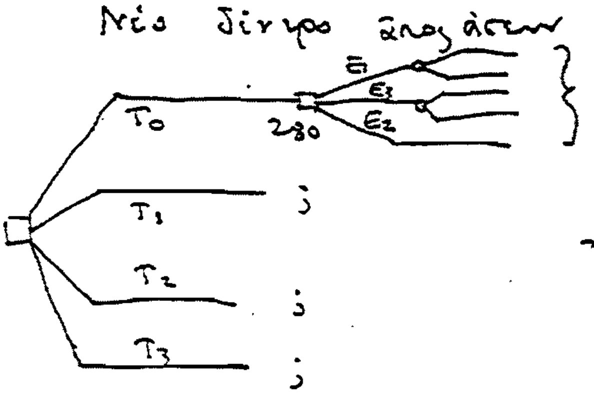
<u>Τέστ</u>	<u>Περιγραφή</u>	<u>Κόστος</u> (χιλ. $)
T_0	κανένα τέστ	—
T_1	Πηδάλιο	90
T_2	Καύσιμα + ἠλεκτρικό σύστημα	130
T_3	Στρόβιλος + κινητήρας (προαιρετικά)	100 + 40 (προαιρ.)

Νέες ἀποφάσεις:

① Ποιό τέστ;

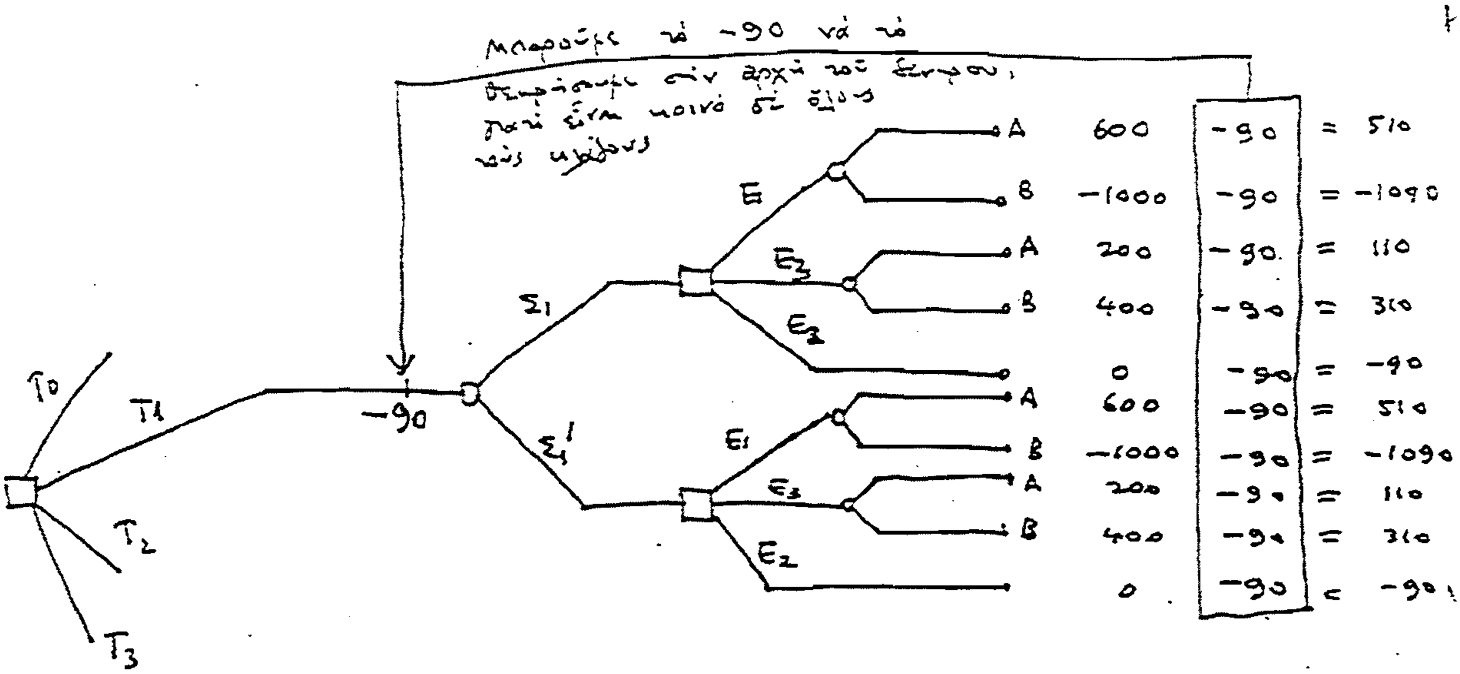
② Ἀνάλογα μέ τό ἀποτέλεσμα, E_1, E_2, ή E_3;

Νέο δένδρο ἀποφάσεων



ὅπως καί πρίν

Ἐξετάζουμε τά T_1, T_2, T_3 χωριστά



όπου Σ_1: Πηδάλιο είναι σπάρτο

Σ_1': —"— δεν —"—

Για να συμπληρωθεί το δένδρο, χρειαζόμαστε τις εξής πιθανότητες:

$p(\Sigma_1)$, $p(\Sigma_1')$

$p(A|\Sigma_1)$, $p(B/\Sigma_1)$

$p(A|\Sigma_1')$, $p(B/\Sigma_1')$, τις οποίες προς το παρόν <u>δεν</u> έχουμε.

Έχουμε όμως τις: $p(A) = 0,8$

$p(B) = 0,2$

Επίσης
$$\left.\begin{aligned} p(\Sigma_1/A) &= 0,1 \\ p(\Sigma_1'|A) &= 0,9 \\ p(\Sigma_1|B) &= 0,6 \\ p(\Sigma_1'|B) &= 0,4 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$
Αυτές οι πιθανότητες βγήκαν από τις αρχικές υποθέσεις για τα πόσα ανοίγματα είναι σπάρτα στις περιπτώσεις A και B. Η επί πλέον παραδοχή είναι ότι τα 10 ανοίγματα είναι εξ ίσου πιθανό να έχουν ληφθεί

Με Bayes, υπολογίζουμε τις ζητούμενες πιθανότητες:

$$p(\Sigma_1) = p(\Sigma_1|A)p(A) + p(\Sigma_1|B)p(B) = \dots = 0{,}8$$

$$\Rightarrow p(\Sigma_1') = 0{,}2$$

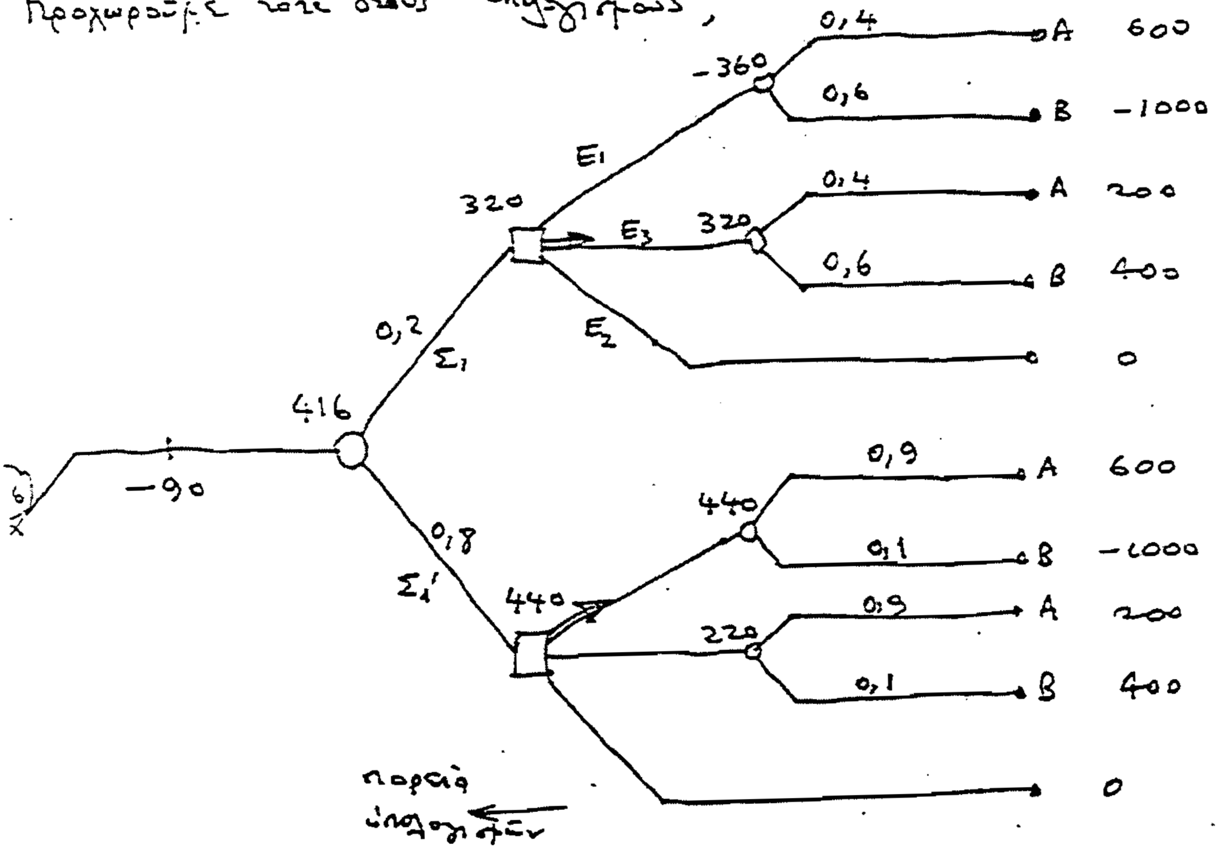
$$p(A|\Sigma_1) = \frac{p(\Sigma_1|A)\,p(A)}{p(\Sigma_1)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}8}{0{,}2} = 0{,}4$$

$$\Rightarrow p(B|\Sigma_1) = 0{,}6$$

$$p(A|\Sigma_1') = \frac{p(\Sigma_1'|A)\,p(A)}{p(\Sigma_1')} = \frac{0{,}9 \times 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}9$$

$$\Rightarrow p(B|\Sigma_1') = 0{,}1$$

Προχωρούμε τώρα στους υπολογισμούς,



δηλαδή το προσδοκώμενο κέρδος είναι 326 (χιλ \$), μεγαλύτερο από το T_0 (280).

Ποιά είναι η ΠΤΤΠ;

Προσδοκώμενο κέρδος με τέλεια πληροφόρηση = 560 (από πριν)

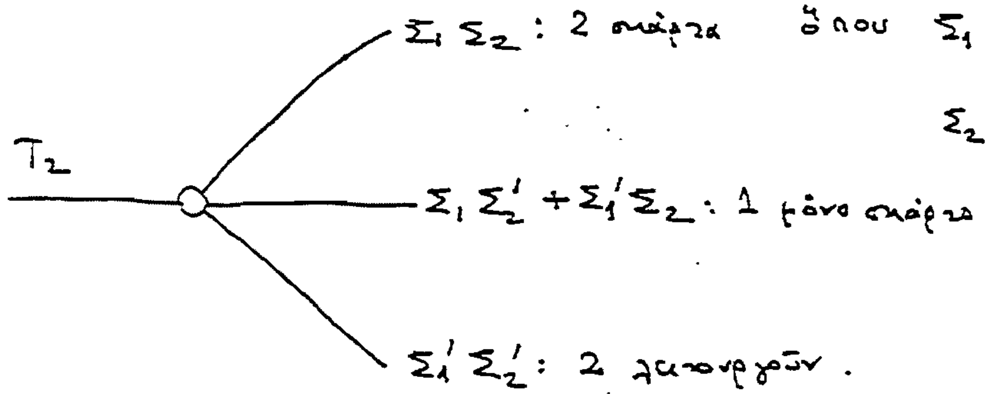
Προσδοκώμενο κέρδος τώρα = 326

$\Rightarrow$ <u>ΠΤΤΠ = 234</u> (χιλ. \$).

Βλέπουμε ότι η ΠΤΤΠ <u>έπεσε</u> (έναντι του T_0). Διότι τώρα (T_1) έχουμε <u>κάποια</u> (μερική) πληροφόρηση, από το τεστ. Η μερική αυτή πληροφόρηση κάνει την επί πλέον αξία της τέλειας πληροφόρησης μικρότερη.

<u>Κλάδος T_2</u>

Πιθανές εκβάσεις τεστ



όπου Σ_1 : το 1ο κομμάτι είναι σκάρτο
Σ_2 : το 2ο κομμάτι είναι σκάρτο

Χρειαζόμενες πιθανότητες: $p(\Sigma_1 \Sigma_2)$, $p(\Sigma_1 \Sigma_2' + \Sigma_1' \Sigma_2)$, $p(\Sigma_1' \Sigma_2')$

επίσης

$$\left.\begin{array}{l} p(A|\Sigma_1 \Sigma_2) = 0 \\ p(B|\Sigma_1 \Sigma_2) = 1 \end{array}\right\} \text{(προφανές!)}$$

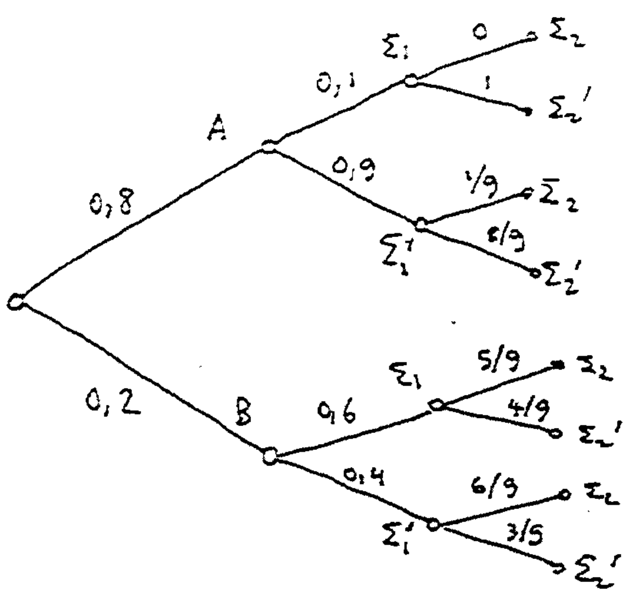
$$p(A|\Sigma_1 \Sigma_2' + \Sigma_1' \Sigma_2)$$

$$p(B|\Sigma_1 \Sigma_2' + \Sigma_1' \Sigma_2)$$

$$p(A|\Sigma_1' \Sigma_2')$$

$$p(B|\Sigma_1' \Sigma_2')$$

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες αυτές κατά Bayes, χρειαζόμαστε να βρούμε τις πιθανότητες $p(\Sigma_1' \Sigma_2 + \Sigma_1 \Sigma_2' | A)$, $p(\Sigma_1 \Sigma_2' + \Sigma_1' \Sigma_2 | B)$, $p(\Sigma_1' \Sigma_2' | A)$ και $p(\Sigma_1' \Sigma_2' | B)$. Χρησιμοποιούμε το βοηθητικό δέντρο:



$p(\Sigma_2 | A\Sigma_1) = 0$

$p(\Sigma_2' | A\Sigma_1) = 1$

$p(\Sigma_2 | A\Sigma_1') = \frac{1}{9}$ (1 από τά υπόλοιπα 9 είναι πάρτα)

$p(\Sigma_2' | A\Sigma_1') = \frac{8}{9}$

$p(\Sigma_2 | B\Sigma_1) = \frac{5}{9}$

$p(\Sigma_2' | B\Sigma_1) = \frac{4}{9}$

$p(\Sigma_2 | B\Sigma_1') = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$p(\Sigma_2' | B\Sigma_1') = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Επομένως,

$p(\Sigma_1'\Sigma_2 + \Sigma_1\Sigma_2' | A) = 0,1 \times 1 + 0,9 \times \frac{1}{9} = 0,2$

$p(\Sigma_1'\Sigma_2' | A) = 0,9 \times \frac{8}{9} = 0,8$

$p(\Sigma_1\Sigma_2 | B) = 0,6 \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$p(\Sigma_1'\Sigma_2 + \Sigma_1\Sigma_2' | B) = 0,6 \times \frac{4}{9} + 0,4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

$p(\Sigma_1'\Sigma_2' | B) = 0,4 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Άρα $p(\Sigma_1\Sigma_2) = p(\Sigma_1\Sigma_2 | A)p(A) + p(\Sigma_1\Sigma_2 | B)p(B) = \cdots = 0.067$

$p(\Sigma_1'\Sigma_2 + \Sigma_1\Sigma_2') = \cdots = 0.266$

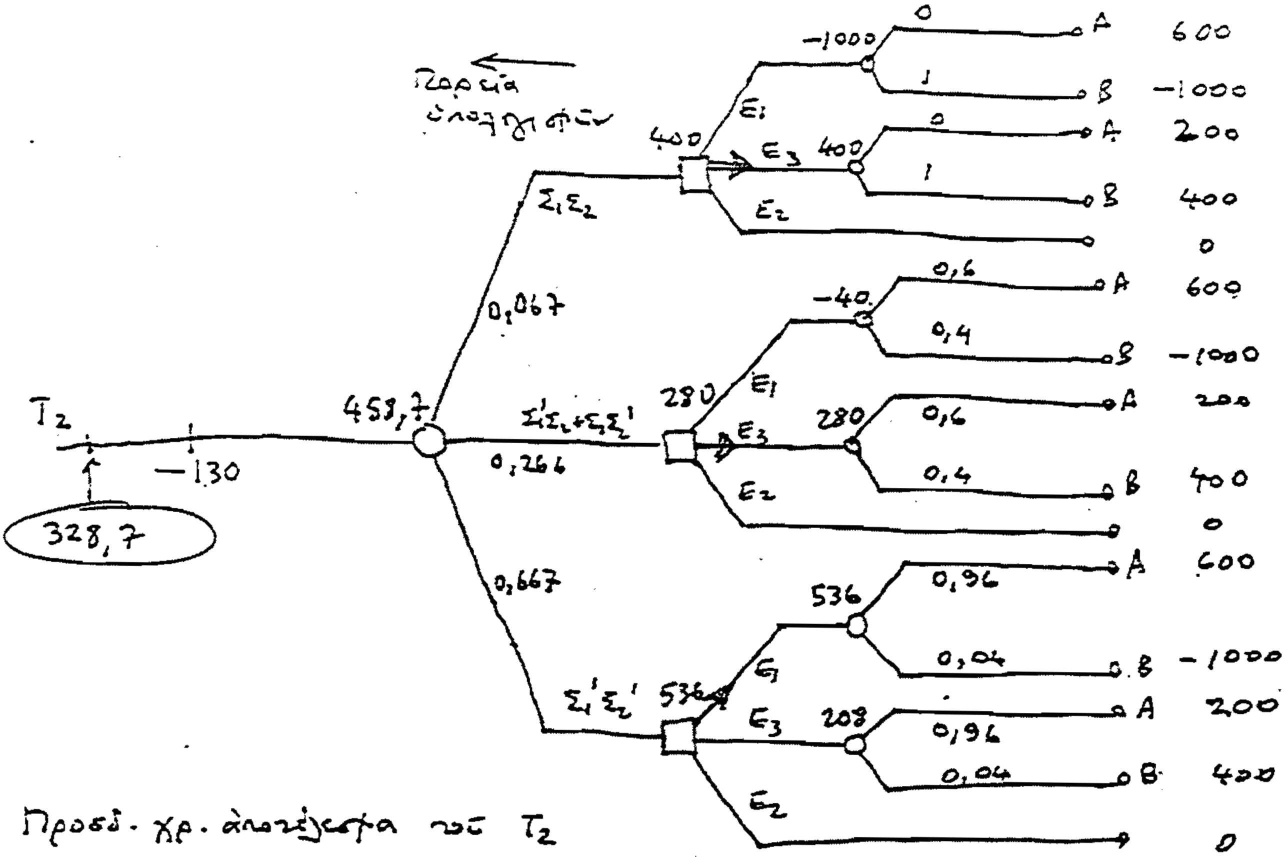
$p(\Sigma_1'\Sigma_2') = \cdots = 0.667$.

BAYES $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}
&p(A | \Sigma_1\Sigma_2' + \Sigma_1'\Sigma_2) = 0,6 \\
&p(B | \Sigma_1\Sigma_2' + \Sigma_1'\Sigma_2) = 0,4 \\
&p(A | \Sigma_1'\Sigma_2') = 0,96 \\
&p(B | \Sigma_1'\Sigma_2') = 0,04 \\
&p(A | \Sigma_1\Sigma_2) = 0 \\
&p(B | \Sigma_1\Sigma_2) = 1
\end{aligned}\right\}$$

Βλέπουμε ότι τά αποτελέσματα τού τεστ μάς κάνει νά <u>αλλάξουμε</u> τίς εκτιμήσεις μας γιά τό ποιό κουτί είναι νά είναι τό σωστό Α ή Β.

Τό νέο δέντρο είναι λοιπόν:



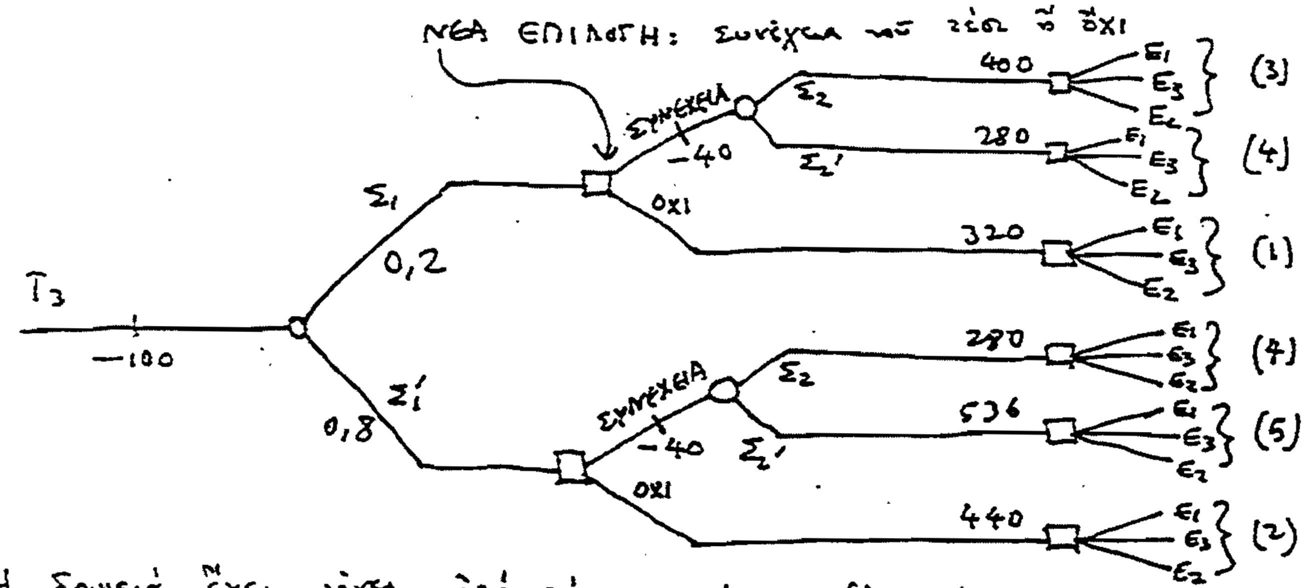
Προσδ. χρ. αποτέλεσμα του T_2

$= 328,7$ (χιλιάδες). (μεγαλύτερο από το T_1)

ΠΤΤΠ $= 560 - 328,7 = 231,3$ (χιλ. \$)

<u>Κλάδος T_3</u> : (α) Τέλος προβλέψεων έναντι \$100 χιλ

(β) ανάλογα με τα αποτελέσματα, συμπληρωματικά τέλη [illegible] με \$40 χιλ.



Η δουλειά έχει γίνει από τα προηγούμενα δέντρα:

(1), (2) : Τα ίδια με τους 2 κλάδους του T_1 : Τιμές 320 και 440

(3) : Κλάδος $\Sigma_1\Sigma_2$ του T_2: 400

(4) : Κλάδος $\Sigma_1\Sigma_2' + \Sigma_1'\Sigma_2$ του T_2 : 280

(5) : Κλάδος $\Sigma_1'\Sigma_2'$ του T_2 : 536

Μένει νά βροῦμε τίς πιθανότητες

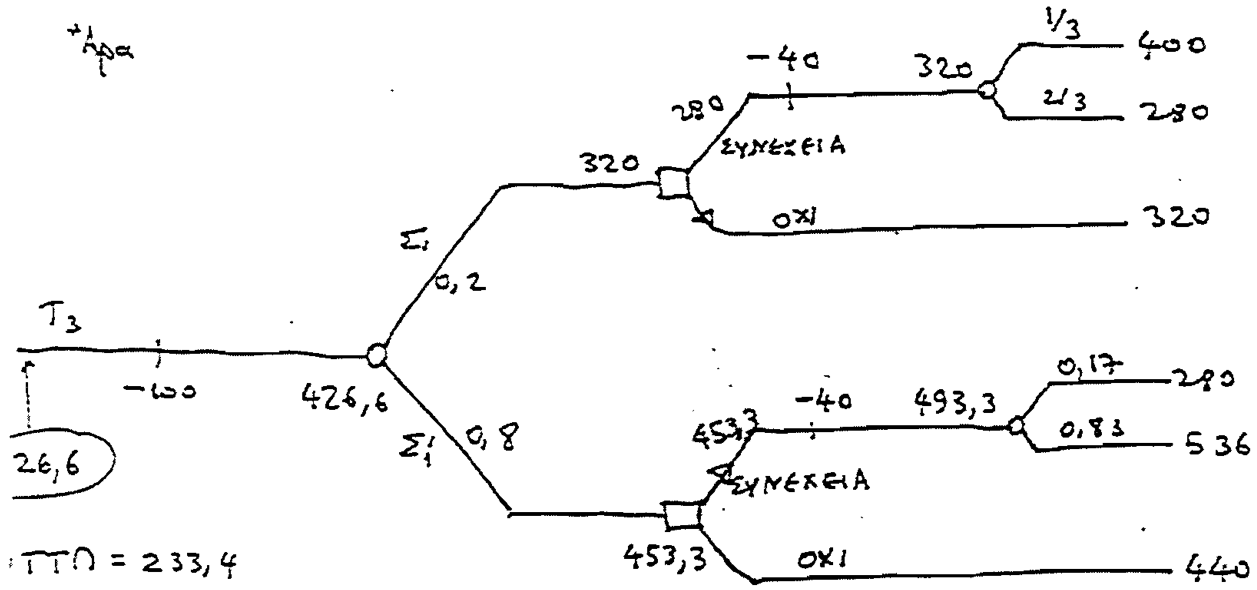
$p(\Sigma_2|\Sigma_1)$, $p(\Sigma_2'|\Sigma_1)$, $p(\Sigma_2|\Sigma_1')$ καί $p(\Sigma_2'|\Sigma_1)$.

Αὐτές τίς βρίσκουμε ἀπό τό βοηθητικό δέντρο (2 σελίδες πρίν)

$$p(\Sigma_2|\Sigma_1) = \frac{p(\Sigma_2\Sigma_1)}{p(\Sigma_1)} = \frac{1}{3} \qquad p(\Sigma_2|\Sigma_1') = \frac{p(\Sigma_2\Sigma_1')}{p(\Sigma_1')} = 0,17$$

$$p(\Sigma_2'|\Sigma_1) = \frac{2}{3} \qquad p(\Sigma_2'|\Sigma_1') = 0,83$$

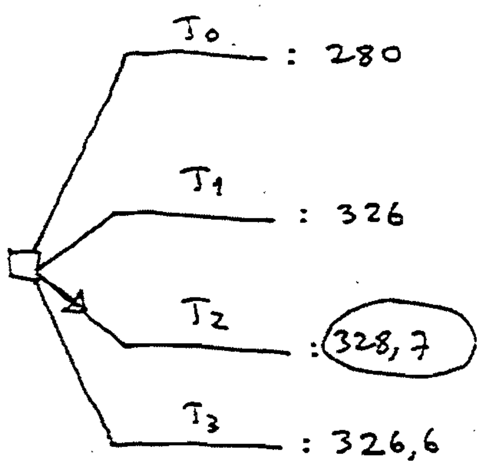
Ἄρα



ΤΤΠ = 233,4

⟵ Πορεία ὑπολογισμῶν

Ἑπομένως ἔχουμε τώρα τό ὅλο πρόβλημα λυμένο:



⇒ Βέλτιστη ἐπιλογή : T_2

καί ἄν :

(α) καί τά 2 σκάρτα ⇒ E_3 (ἐγγύηση)

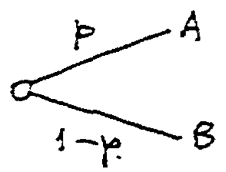
(β) τό 1 σκάρτο ⇒ E_3 (ἐγγύηση)

(γ) κανένα σκάρτο ⇒ E_1 (χωρίς ἐγγύηση)

(τέλος παραδείγματος)

2. ΔΟΜΗ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ ΡΙΣΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ ΛΗΠΤΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

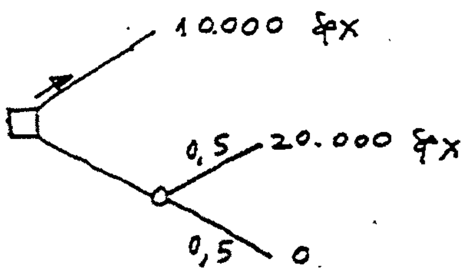
Μέχρι στιγμῆς ὑποθέσαμε ὅτι ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων ἔχει <u>οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου</u> μέ τό νά θέλει νά μεγιστοποιήσει τό <u>προσδοκώμενο χρηματικό ἀποτέλεσμά</u> του. Οὐδέτερη ἀντιμετώπιση σημαίνει ὅτι ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων <u>εἶναι ἀδιάφορος</u>



$\sim \quad pA + (1-p)B$

μεταξύ τοῦ νά λάβει μέρος σέ ἕνα τυχερό παιχνίδι (λοταρία) τό ὁποῖο μέ πιθανότητα p τοῦ ἀποφέρει ποσό A καί μέ πιθανότητα $1-p$ τοῦ ἀποφέρει ποσό B (ἀριστερά), καί τοῦ νά λάβει <u>στά σίγουρα</u> τό προσδοκώμενο χρηματικό ἀποτέλεσμα $pA + (1-p)B$ τοῦ παιχνιδιοῦ αὐτοῦ (δεξιά).

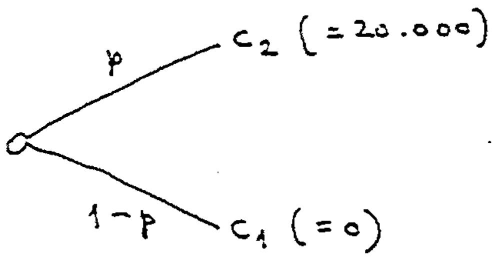
Η παραδοχή της οὐδέτερης ἀντιμετώπισης τοῦ ρίσκου <u>δέν</u> εἶναι κατ' ἀνάγκην ρεαλιστική. Πχ στό κάτωθι δέντρο ἀποφάσεων, πολλοί μποροῦν νά προτιμήσουν



τόν πάνω κλάδο (10.000 δρχ στά σίγουρα), παρ' ὅλον ὅτι τό προσδοκώμενο χρηματικό ἀποτέλεσμα καί τῶν δύο κλάδων εἶναι τό ἴδιο. Μάλιστα, πολλοί θά συμβιβαζόταν μέ ποσό <u>μικρότερο</u> τῶν 10.000 δρχ στόν πάνω κλάδο (πχ 8.000 δρχ), ἀκριβῶς ἐπειδή φοβοῦνται τό ἐνδεχόμενο νά μήν κερδίσουν τίποτε ἄν διαλέξουν τόν κάτω κλάδο. Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι χρειάζεται μιά καινούργια θεώρηση πού νά μπορεῖ νά λαμβάνει ὑπ' ὄψη παράμετρες προτιμήσεως, δηλαδή ένα πλαίσιο βάσει τοῦ ὁποίου νά μποροῦν νά ἐκφράσουν ποσοτικά οἱ προτιμήσεις τοῦ λήπτη τῶν ἀποφάσεων σχετικά μέ τό ρίσκο, ἰδίως ἄν αὐτός <u>δέν</u> ἔχει οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου.

<u>Ἡ συνάρτηση προτίμησης καί ἡ συνάρτηση χρησιμότητας</u>.

Ἔστω ἕνα πρόβλημα ἀπόφασης ὑπό ἀβεβαιότητα, στό ὁποῖο οἱ δυνατές ἐκβάσεις μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν χρηματικά, μέ τήν χειρότερη δυνατή ἔκβαση ἴση μέ c_1, καί τήν καλύτερη ἴση μέ c_2. (Στό πιό πάνω παράδειγμα, $c_1 = 0$, $c_2 = 20.000$). Θεωροῦμε κατόπιν τό ἑξῆς τυχερό παιχνίδι (λοταρία)



Σάν λήπτης τῶν ἀποφάσεων, καλούμαστε νά διαλέξουμε μεταξύ τῶν ἑξῆς 2 ἐπιλογῶν:

(1) λαμβάνουμε μέρος στή λοταρία

(2) λαμβάνουμε ἕνα χρηματικό ποσό X στά σίγουρα.

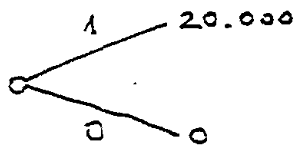
<u>Ἐρώτηση</u>: Γιά ποιά τιμή τοῦ X θά εἴμαστε <u>ἀδιάφοροι</u> μεταξύ τῶν (1) καί (2);

Προφανῶς, ἡ τιμή αὐτή εἶναι συνάρτηση τοῦ p, γι' αὐτό καί τήν ὀνομάζουμε $X(p)$. Τό $X(p)$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση τῆς "κατάστασης" τοῦ λήπτη τῶν ἀποφάσεων, τόσο τῆς παρούσας του θέσης, ὅσο καί τῆς γενικῆς του ἰδιοσυγκρασίας, ψυχολογίας, κτλ.

Ἡ πιό πάνω ἐρώτηση μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί ἀλλοιῶς: Δεδομένης τῆς τιμῆς τοῦ X, γιά ποιά τιμή τοῦ p θά εἴμαστε ἀδιάφοροι μεταξύ τῶν (1) καί (2); Ὀνομάζομε τήν τιμή αὐτή $\Pi(X)$.

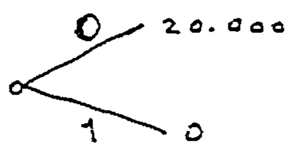
Ἡ συνάρτηση $X(p)$ (ἤ, ἀντίστοιχα, ἡ $\Pi(X)$) μπορεῖ νά βρεθεῖ σημεῖο πρός σημεῖο, ὡς ἑξῆς:

Γιά $p=1$ εἶναι προφανές ὅτι $X(1) = 20.000$



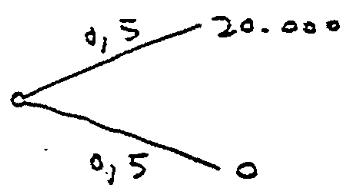
$\sim$ 20.000

Γιά $p=0$ ἐπίσης εἶναι προφανές ὅτι $X(0)=0$



$\sim$ 0

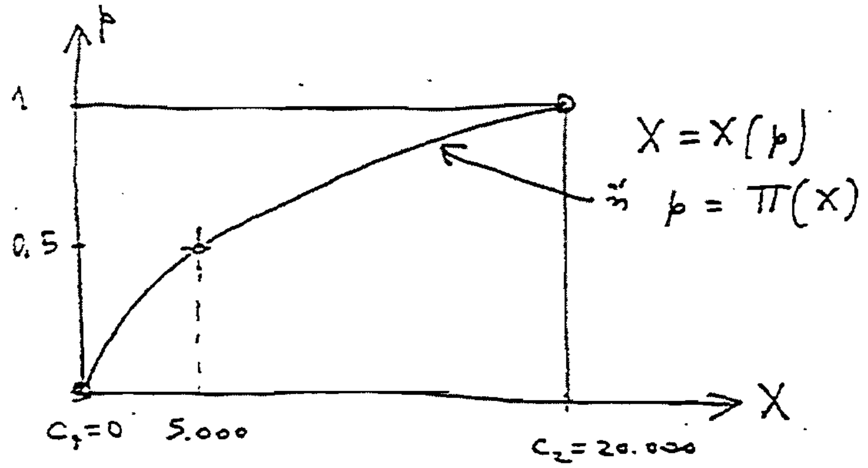
Γιά $p=0,5$ ἡ ἀπάντηση ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ἴδιο τό λήπτη τῶν ἀποφάσεων



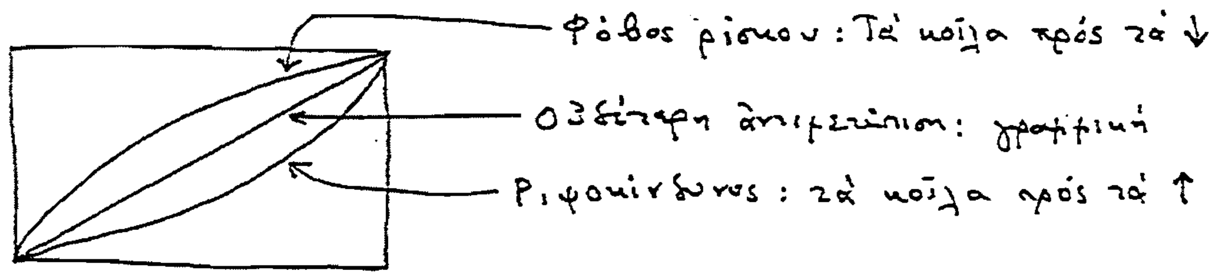
$\sim$ $X(0,5) = ;$

Γιά οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου, $X(0,5) = 10.000$. Ἔστω ὅμως ὅτι ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων φοβᾶται τό ρίσκο, καί κρίνει ὅτι τοῦ ἀρκοῦν 5.000 δρχ (στά σίγουρα) γιά νά μήν παίξει τό πιό πάνω παιχνίδι. Τότε $X(0,5) = 5.000$.

Ἀπαντώντας στήν ἴδια ἐρώτηση καί γιά ἄλλες τιμές τοῦ p, κατασκευάζεται ἡ ἑξῆς καμπύλη



Ἡ συνάρτηση $\Pi(X)$ καλεῖται <u>συνάρτηση προτίμησης</u> (τοῦ λήπτη τῶν ἀποφάσεων) γιά τό χρῆμα. $\Pi \in [0, 1]$.



Ὑποθέτοντας τώρα ὅτι ὁ λήπτης ἀποφάσεων <u>ξέρει</u> ποιά εἶναι ἡ συνάρτηση προτίμησής του (καί ὑπάρχουν συστηματικοί τρόποι κατασκευῆς μιᾶς τέτοιας συνάρτησης), προκύπτει ὁ ἑξῆς τρόπος ἐπίλυσης ἑνός προβλήματος λήψης ἀποφάσεων ὑπό ἀβεβαιότητα:

(1) Κατασκευάζουμε κανονικά τό δένδρο τῶν ἀποφάσεων ὅπως πρίν, μέ τά χρηματικά ἀποτελέσματα στούς τερματικούς κόμβους τοῦ δένδρου.

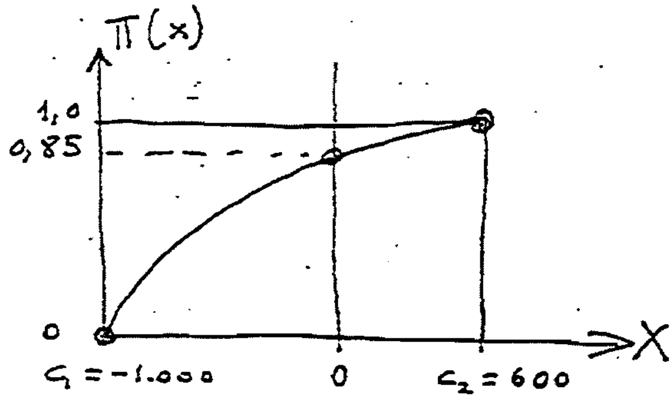
(2) Ὑπολογίζουμε τίς τιμές τῆς προτίμησης $\Pi(X_i)$ γιά κάθε χρηματικό ἀποτέλεσμα X_i.

(3) Ἐντάσσουμε τούς ὑπολογισμούς στό δένδρο ἀποφάσεων

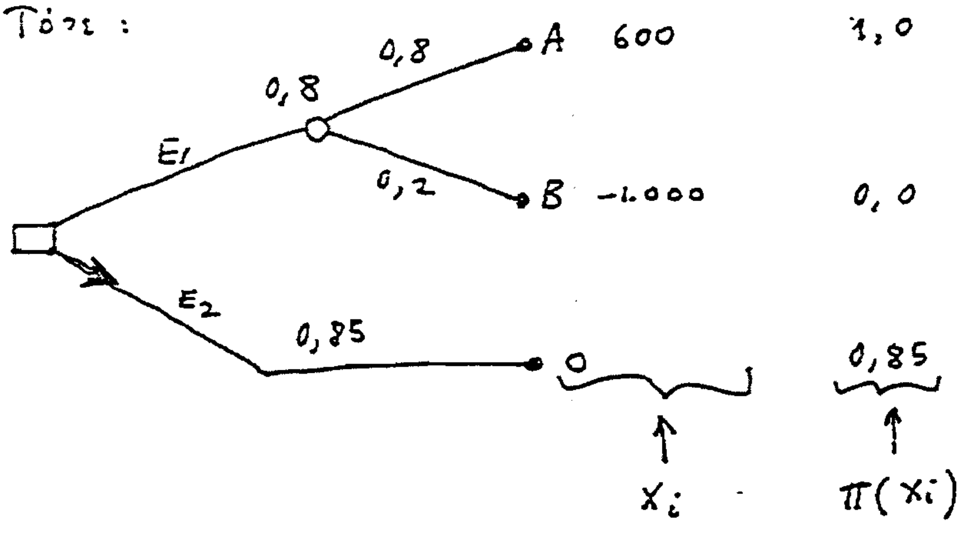
κὶ κριτήριο μεγιστοποιήσεως <u>ὄχι</u> τὸ προσδοκώμενο χρηματικὸ ἀποτέλεσμα, ἀλλὰ τὴν <u>προσδοκώμενη προτίμηση</u>.

<u>Ἐφαρμογὴ σὸ ἀρχικὸ πρόβλημα τοῦ ηλιοπώλη</u> (ἐπιλογὴ μεταξὺ E_1, E_2, σελίδα 7).

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση προτίμησης δὲν εἶναι γραμμική, ἀλλὰ ἡ ἀκόλουθη:



Τότε:



Βλέπουμε ὅτι ἡ ἀπόφαση εἶναι διαφορετικὴ (καλύτερη ἐπιλογὴ ἡ E_2) ἀπὸ ὅ,τι προηγουμένως.

<u>Σημειώσεις</u>: (1) Σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν περίπτωση οὐδέτερης ἀντιμετώπισης ρίσκου ($\Pi(x)$ γραμμική), ἐδῶ <u>δὲν</u> μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε χρηματικὰ ποσὰ σὲ <u>ἐνδιάμεσα</u> σημεῖα τοῦ δένδρου ἀποφάσεων. Θὰ πρέπει <u>ὅλες</u> τὶς χρηματικὲς ἐπιπτώσεις

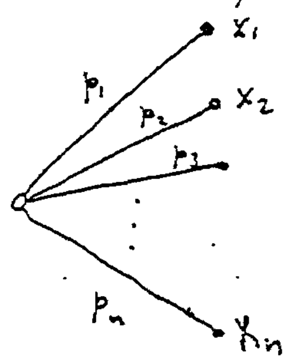
(ἔστω καί ἄν συμβαίνουν σέ ἐνδιάμεσα στάδια τῆς διαδικασίας ἀπόφασης) νά τίς λαμβάνουμε ὑπ' ὄψη <u>στό τέλος</u> (δηλ. στούς τερματικούς) κόμβους τοῦ δένδρου.

(2) τό <u>γιατί</u> ἡ πιό πάνω ἀντιμετώπιση (δηλαδή ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος μέ τίς τιμές τῆς $\Pi(X_i)$ ἀντί τῶν X_i) εἶναι ἡ <u>σωστή</u> ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος λήψης ἀποφάσεων ὑπό ἀβεβαιότητα, ἀποδεικνύεται ἀναλυτικά, ἀλλά ξεφεύγει ἀπό τά ὅρια τοῦ παρόντος.

<u>Βασική παρατήρηση</u>: Ἡ ἀνάλυση ὁδηγεῖ σέ <u>ἀκριβῶς</u> τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν $\Pi(x)$ μέ ὁποιαδήποτε συνάρτηση $u(x) = \alpha\Pi(x) + \beta$ (μέ $\alpha>0$). Σέ ἀντίθεση μέ τήν $\Pi(x)$, πού εἶναι περιορισμένη μεταξύ 0 καί 1, ἡ $u(x)$ μπορεῖ νά λαμβάνει ὁποιεσδήποτε τιμές (ἀνάλογα μέ τά α, β) καί συνήθως ὀνομάζεται <u>συνάρτηση χρησιμότητας</u>. Ἐπειδή ἡ συνάρτηση χρησιμότητας εἶναι μιά γενικευμένη μορφή τῆς συνάρτησης προτίμησης, στό ἑξῆς θά μιλᾶμε μόνο γιά συνάρτηση χρησιμότητας, καί γιά μεγιστοποίηση τῆς προσδοκώμενης χρησιμότητας.

<u>Βέβαιο χρηματικό ἰσοδύναμο, καί ἀντίτιμο ρίσκου.</u>

Ἔστω ἡ ἑξῆς λοταρία μέ n πιθανές (χρηματικές) ἐκβάσεις



Ἡ προσδοκώμενη χρησιμότητα τῆς λοταρίας εἶναι

$$E[u(x)] = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$$

ὅπου $u(x)$ ἡ συνάρτηση χρησιμότητας τοῦ λήπτη τῶν ἀποφάσεων

Ἔστω X_B ἡ τιμή τοῦ X γιά τήν ὁποία $u(X_B) = E[u(X)]$

Ἡ τιμή αὐτή X_B καλεῖται τό "βέβαιο χρηματικό ἰσοδύναμο" (ΒΧΙ) τῆς λοταρίας.

Ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων εἶναι <u>ἀδιάφορος</u> μεταξύ τοῦ νά λάβει μέρος στή λοταρία καί τοῦ νά λάβει τό ποσό X_B στά σίγουρα (καί οἱ 2 ἐκβάσεις ἔχουν γι' αὐτόν τήν ἴδια προσδοκώμενη χρησιμότητα).

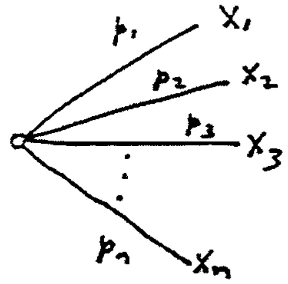
Εἶναι προφανές ὅτι ἄν ἡ $u(x)$ εἶναι γραμμική (οὐδέτερη ἀντιμετώπιση ρίσκου), τότε $X_B = E[X]$.

Ἐάν ἡ $u(x)$ <u>δέν</u> εἶναι γραμμική, τότε ἐν γένει $X_B \neq E[X]$.

Γιά λήπτη ἀποφάσεων πού φοβᾶται τό ρίσκο, $X_B < E[x]$.

Γιά ριψοκίνδυνο λήπτη ἀποφάσεων, $X_B > E[X]$.

Τό <u>ἀντίτιμο ρίσκου</u> (ΑΡ) μιᾶς λοταρίας εἶναι τό μέγιστο πού ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων εἶναι διατεθειμένος νά πληρώσει γιά νά λάβει στά σίγουρα τό προσδοκώμενο χρηματικό ἀποτέλεσμα τῆς λοταρίας ἀντί νά λάβει μέρος στή λοταρία. Ἔτσι,



$$\sim \quad E[x] - AP$$

$$\Rightarrow \quad E[u(x)] = u\big[E[x] - AP\big]. \quad \text{Ὅμως}$$

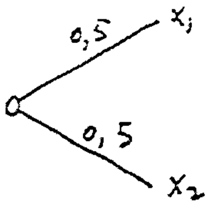
$$= u(X_B) = u\big[E[x] - AP\big] \Longrightarrow \boxed{AP = E[x] - X_B}$$

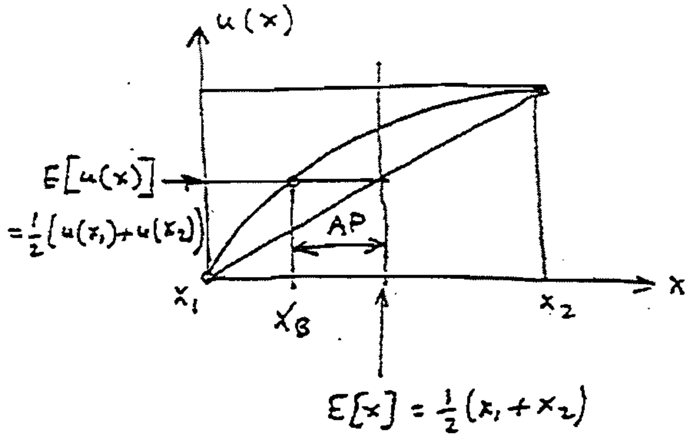
$AP > 0$: φόβος ρίσκου

$AP = 0$: οὐδέτερη ἀντιμετώπιση

$AP < 0$: ριψοκίνδυνος

Παράδειγμα γιά $n=2$, $p_1=p_2=0,5$





Συνάρτηση φόβου ρίσκου

Ὁρίζεται ὡς $r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$, ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ παράγωγοι ὑπάρχουν.

$$r(x) = -\frac{d}{dx}\left(\log u'(x)\right)$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι $r(x) > 0 \iff$ ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων φοβᾶται τό ρίσκο.

Ἡ $r(x)$ καί τό (AP) συνδέονται, ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι $E[x] = X_0$, $X = X_0 + \tilde{X}$ ὅπου τό $\tilde{X}$ εἶναι σχετικά μικρό. Προφανῶς, $E[\tilde{X}] = 0$. Τότε ἀναπτύσσουμε κατά Taylor τήν $E[u(X)] = u(X_0 - AP)$ $\Rightarrow$

1ο μέλος $= E[u(X_0 + \tilde{X})] = E[u(X_0) + \tilde{X}u'(X_0) + \frac{1}{2}\tilde{X}^2 u''(X_0)^2 + \dots]$

$= u(X_0) + \frac{1}{2} E[\tilde{X}^2] u''(X_0) + \cdots$

2ο μέλος $= u(X_0) - (AP)u'(X_0) + \cdots$

$\Rightarrow \quad -(AP)u'(x_0) \simeq \frac{1}{2} E[\tilde{X}^2] u''(x_0)$

Ἀλλά $E[\tilde{X}^2] = \sigma_X^2 \Rightarrow \boxed{(AP) \simeq \frac{1}{2}\sigma_X^2 \, r(X_0)}$

δηλαδή τό ἀσφάλιστρο ρίσκου ἔχει σχέση μέ τή συνάρτηση ρίσκου καί μέ τή διασπορά τῆς μεταβλητῆς x.

Ἡ συνάρτηση $r(x)$ μπορεῖ νά ↑, νά ↓, ἤ νά εἶναι σταθερά.
Πχ ἡ $u(x) = -e^{-\lambda x}$ ἔχει σταθερό $r(x) = \lambda$.

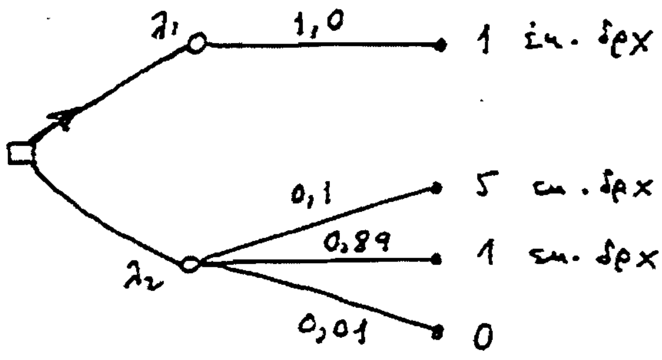
Συμπληρωματικές παρατηρήσεις

(1) Σέ ἀντίθεση μέ τήν περίπτωση γραμμικῆς $u(x)$, ἀποτελέσματα ἀνάγκη γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ΠΤΤΠ γίνεται πολύ πιό δύσκολη στήν περίπτωση μή γραμμικῆς $u(x)$, καί ἀνάγεται στήν ἐπίλυση μή γραμμικῶν ἐξισώσεων ὡς πρός τό μέγιστο ποσό, T_0, πού ὁ λήπτης τῶν ἀποφάσεων εἶναι διατεθειμένος νά πληρώσει γιά νά ἀγοράσει τήν τέλεια πληροφόρηση.

(2) Ἡ θεωρία χρησιμότητας καί οἱ παρεμφερεῖς κλάδοι ἔχουν ἐξελιχθεῖ σέ πολύ ἀνεπτυγμένους κλάδους τῆς ἐπιχειρησιακῆς ἔρευνας καί τῆς οἰκονομικῆς, καί στό θεωρητικό, καί στό πρακτικό ἐπίπεδο. Ἀξιοσημείωτες στήν περιοχή αὐτή εἶναι οἱ ἐργασίες τῶν Arrow, Raiffa, Keeney, Allais, κλπ.

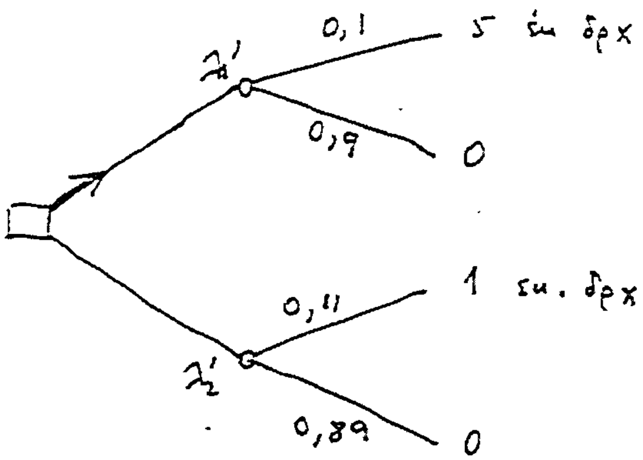
(3) Τό παράδοξο τοῦ Allais

Ὑπό ὁρισμένες συνθῆκες, κάποιος λήπτης ἀποφάσεων μπορεῖ νά προτιμήσει τή λοταρία λ_1 ἀπό τή λ_2



(πχ διότι μπορεῖ νά αἰσθανθεῖ πολύ ἄσχημα ἄν ἔκβαση τῆς λ_2 εἶναι τό 0)

Ὁ ἴδιος λήπτης ἀποφάσεων ὅμως μπορεῖ νά προτιμήσει τὴν λοταρία λ_1' ἀπό τὴν λ_2'·



Αὐτό κατά τόν Allais εἶναι ἀντίφαση. Διότι ἄν ἡ $u(x)$ εἶναι τέτοια ὥστε $u(0)=0$, $u(5)=1$ καί $u(1)=\Pi$, τότε

"προτιμᾶται ἀπό"

$$\lambda_1 \succ \lambda_2 \iff \Pi > 0,1 + 0,89\,\Pi \iff \Pi > \frac{10}{11}$$

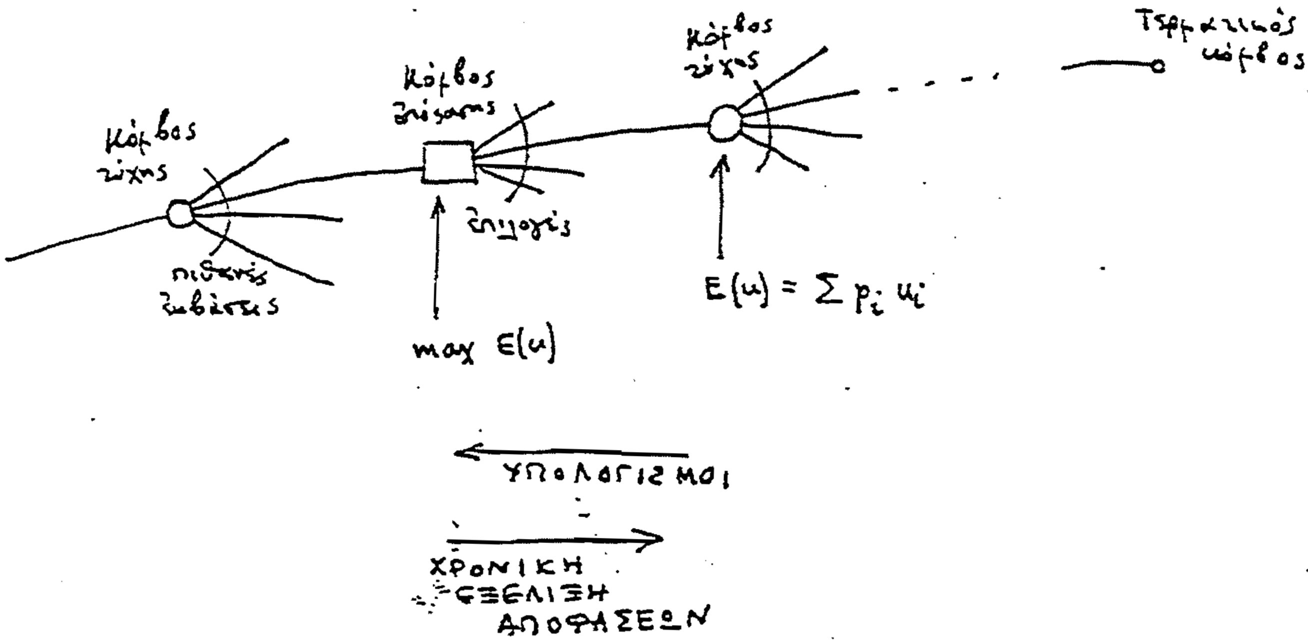
ἐνῶ $$\lambda_1' \succ \lambda_2' \iff 0,1\,\Pi > 0,11\,\Pi \iff \Pi < \frac{10}{11}$$

Στήν πραγματικότητα, τό παράδοξο ἐξηγεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ἔκβαση "0" εἶναι πολύ διαφορετική στίς 2 περιπτώσεις, καί συνεπῶς θά ἔχει καί διαφορετική χρησιμότητα.

(4) Σχετικά λίγες προσπάθειες ἔχουν γίνει γιά τήν ἐκτίμηση τῆς $u(x)$ ληπτῶν ἀποφάσεων στίς διάφορες κατηγορίες (ἐξοπλιστικά, κλπ). Περισσότερα γι' αὐτό τό θέμα στό κεφάλαιο 4.

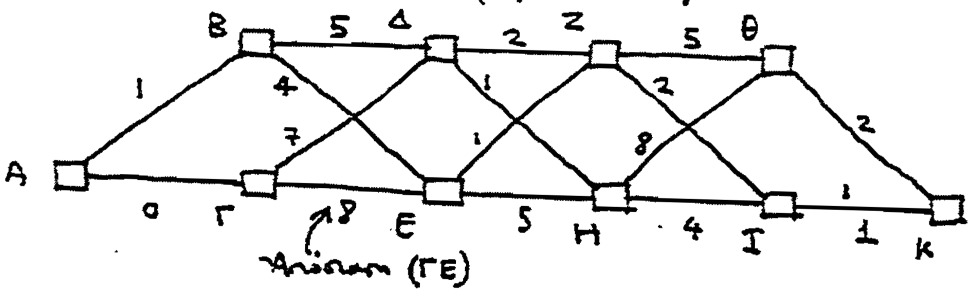
3. ΣΕΙΡΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Τυπικό δένδρο αποφάσεων



Η τεχνική του <u>δυναμικού προγραμματισμού</u> είναι ένα συστηματικό πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων <u>σειρών</u> αποφάσεων, δηλ. αποφάσεων πού παίρνονται η μία μετά την άλλη, είτε υπό συνθήκες βεβαιότητας, είτε υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

<u>Παράδειγμα 1</u> (βέλτιστη διαδρομή σέ συγκοινωνιακό δίκτυο)



Νά βρεθεί η διαδρομή από τό Α στό Κ πού νά ελαχιστοποιεί την ολική απόσταση πού πρέπει νά διανυθεί.

Προφανώς, η επίλυση του προβλήματος μέ <u>ολική απαρίθμηση</u>, είναι μέν δυνατή, αλλά υπολογιστικά άσχημη (ιδίως γιά μεγαλύτερα δίκτυα).

Αντί γιά όλική άρίθμηση, όρίζομε τίς έξής μεταβλητές:

1) Τό n, τό λεγόμενο "<u>μεταβλητή σταδίου</u>", σάν δείκτη πού μετράει σέ ποιό στάδιο τής διαδικασίας βρισκόμαστε. $n=1$ άν είμαστε στό Α, $n=2$ άν είμαστε στό Β ή Γ, $n=3$ γιά Δ, Ε, $n=4$ γιά Ζ, Η, $n=5$ γιά Θ, Ι καί $n=6$ γιά τόν κόμβο Κ.

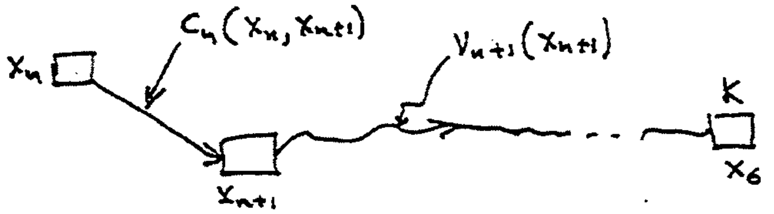
2) Τό X_n, τό λεγόμενο "<u>μεταβλητή κατάστασης</u>", ώς έξής: $X_n = \begin{cases} 1 & \text{άν είμαστε ΑΝΩ} \\ 0 & \text{—"— ΚΑΤΩ} \end{cases}$
(δηλαδή $X_2 = 1$ σημαίνει ότι είμαστε στόν κόμβο Β, κτλ).

3) Οί αποστάσεις $c_n(X_n, X_{n+1})$ μετάβασης από τόν κόμβο c_n στόν κόμβο X_{n+1} είναι δεδομένες καί γνωστές.

Τότε τό πρόβλημα διατυπώνεται ώς έξής:

$$\min_{X} \sum_{n=1}^{5} c_n(X_n, X_{n+1})$$
$$\text{μέ } X_n \in \{0,1\} \quad n=2,\dots,5$$
$$\text{καί } X_1 = X_6 = 0$$

Γιά τήν επίλυσή του όρίζομε τήν "συνάρτηση βέλτιστης τιμής" $V_n(X_n)$ σάν τήν ελάχιστη δυνατή απόσταση διαδρομής πού ξεκινάει από τόν κόμβο πού ορίζει τό X_n καί τερματίζει στόν κόμβο $K(X_6)$. Τότε είναι σαφές ότι ή V ικανοποιεί τήν έξής επαγωγική σχέση:



$$V_n(X_n) = \min_{X_{n+1} \in \{0,1\}} \left[c_n(X_n, X_{n+1}) + V_{n+1}(X_{n+1}) \right]$$

μέ όριακή συνθήκη τήν

$$V_6(X_6) = 0$$

Η πιό πάνω επαγωγική σχέση είναι γενικά γνωστή σάν <u>εξίσωση τού</u>

<u>Bellman</u> (από τον πατέρα του δυναμικού προγραμματισμού R. Bellman)
Ξεκινώντας από την οριακή συνθήκη, η επίλυση του προβλήματος είναι τώρα εύκολη:

$V_6(0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} V_5(0) = 1 + 0 = 1 \\ V_5(1) = 2 + 0 = 2 \end{array}\right\}$ δεν χρειάζεται min

$V_4(0) = \min[8+2, 4+1] = 5$

$V_4(1) = \min[5+2, 2+1] = 3$

$V_3(0) = \min[1+3, 5+5] = 4$

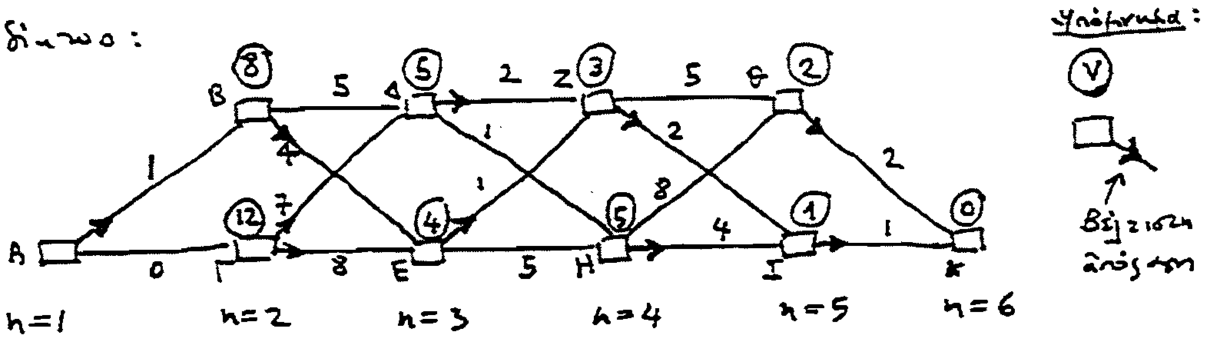
$V_3(1) = \min[2+3, 1+5] = 5$

$V_2(0) = \min[7+5, 8+4] = 12$

$V_2(1) = \min[5+5, 4+4] = 8$

$V_1(0) = \min[1+8, 0+12] = 9$.

Οι πράξεις αυτές, μαζί με την καταγραφή → βέλτιστης απόφασης σε κάθε κόμβο μπορούν να γίνουν και απ' ευθείας στο ίδιο το δίκτυο:



⇒ Βέλτιστη διαδρομή: A → B → E → Z → I → K. Απόσταση = 9.

<u>Σημειώσεις</u>:

1) Επιλύσαμε περισσότερα από 1 προβλήματα: Τη βέλτιστη διαδρομή από <u>κάθε</u> κόμβο στον κόμβο K.

2) Ἡ καταγραφή τοῦ ποιά εἶναι ἡ βέλτιστη ἀπόφαση σέ κάθε κύκλο γίνεται ταυτόχρονα μέ τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τοῦ V.

3) Ὑπολογισμοί, σέ σύγκριση μέ ὁλική ἀρίθμηση:

	Ὁλική ἀρίθμηση	Δ.Π.
Προσθέσεις	80	16
Συγκρίσεις	16	7

(ἡ διαφορά γίνεται πιό σημαντική σέ μεγαλύτερα προβλήματα).

Παράδειγμα 2 (ἔλεγχος ἀποθεμάτων)

Ἡ μηνιαία ζήτηση ἑνός συγκεκριμένου ἐξαρτήματος (πχ βαλβίδες) σέ κάποιο κατάστημα δίδεται ἀπό τόν ἑξῆς πίνακα:

Μήνας, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ἀριθμός βαλβίδων, d_n	8	1	2	9	12	-	4	7	2	10	1	6

Ὁ στόχος εἶναι ὁ ἔλεγχος τοῦ ἀποθέματος βαλβίδων ὥστε τό συνολικό ἐτήσιο κόστος νά ἐλαχιστοποιηθεῖ. Ὑπάρχουν 2 κατηγορίες κόστους:

① Κόστος παραγγελίας $= \begin{cases} \$100 + \$150 \cdot y & \text{ἄν } y>0 \\ 0 & \text{ἄν } y=0 \end{cases}$, ὅπου y εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν βαλβίδων πού παραγγέλλονται.

② Κόστος ἀποθέματος = \$5 ἀνά ἀποθηκευμένη βαλβίδα ἀνά μῆνα.

Ὑποθέτομε ὅτι οἱ παραγγελίες γίνονται στήν ἀρχή κάθε μηνός, καί ὅτι δέν ὑπάρχει καθυστέρηση μεταξύ παραγγελίας καί παράδοσης.

Τό πρόβλημα: Ποιά εἶναι ἡ σειρά παραγγελιῶν πού ἐλαχιστοποιεῖ τό συνολικό ἐτήσιο κόστος;

Τό πρόβλημα εἶναι προφανῶς καί αὐτό πρόβλημα σειρᾶς ἀποφάσεων. Πρωτοῦ παραθέσουμε τήν λύση, περιγράφομε τό γενικό πλαίσιο λύσης τέτοιων προβλημάτων μέ δυναμικό προγραμματισμό.

Δυναμικός Προγραμματισμός – Γενικό πλαίσιο (συνθήκες βεβαιότητας)

Ἀποτελεῖται ἀπό τά ἑξῆς βήματα:

① Ὁρισμός μεταβλητῆς σταδίου, n: Τό n εἶναι ἡ θέση, μέσα στήν χρονική σειρά τῶν ἀποφάσεων, τῆς ἀπόφασης πού καλούμεθα νά λάβομε.

② Ὁρισμός μεταβλητῆς κατάστασης, X_n: Τό X_n ἀντιπροσωπεύει τήν πληροφορία πού εἶναι ἀναγκαία γιά νά μπορέσομε νά πάρουμε τήν ἀπόφαση στό στάδιο n. (Τό X_n μπορεῖ νά εἶναι πολυδιάστατο).

③ Ὁρισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμῆς $V_n(X_n)$: Αὐτή ὁρίζεται σάν ἡ βέλτιστη τιμή (σύμφωνα μέ τό κριτήριο βελτιστοποίησης τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος) ὅλων τῶν ἀποφάσεων πού ἀπολείπονται, ἐάν στό στάδιο n ἡ κατάσταση εἶναι X_n.

④ Ὁρισμός μεταβλητῆς ἀπόφασης $Y_n(X_n)$: Ὁρίζει τίς ἐπιλογές μας ἄν ἡ κατάσταση στό στάδιο n εἶναι X_n.

⑤ Ὁρισμός "ἐξίσωσης μετάβασης": Αὐτή ὁρίζει τό X_{n+1} σάν συνάρτηση τῶν $X_n, Y_n(X_n)$: $X_{n+1} = f_n(X_n, Y_n(X_n))$

⑥ Ὑπολογισμός ἐνδιάμεσου "κόστους" ἀπό X_n σέ X_{n+1}. ("Κόστος" σύμφωνα μέ τό κριτήριο βελτιστοποίησης)

⑦ Διατύπωση ἐπαγωγικῆς σχέσης (Bellman): Συνδέει τό $V_n(X_n)$ μέ τό $V_{n+1}(X_{n+1})$.

⑧ Διατύπωση ὁριακῶν συνθηκῶν: Ὁρίζουν τήν τιμή τοῦ $V_n(X_n)$ ἄν τό X_n εἶναι "τερματική κατάσταση" (δηλαδή ἄν τότε τελειώνει ἡ διαδικασία ἀπόφασης)

⑨ Ἐπίλυση ἐπαγωγικῆς σχέσης γιά κάθε n, X_n: Ἡ ἐπίλυση γίνεται ἀπό τό τέλος ($n = n_{max}$) πρός τήν ἀρχή ($n=1$). Καταγράφονται οἱ τιμές τοῦ $V_n(X_n)$ καί τῆς βέλτιστης ἀπόφασης $Y_n^*(X_n)$ γιά κάθε n, X_n. (Ἡ βέλτιστη ἀπόφαση εἶναι αὐτή πού βελτιστοποιεῖ τό 2ο μέλος της επαγωγικής σχέσης)

(10) Βάσει του πίνακα $y_n^*(x_n)$, και ξεκινώντας από την αρχική τιμή του X_1, προσδιορίζεται μέσω της "εξίσωσης μετάβασης" (βλ. (5)) τη βέλτιστη σειρά αποφάσεων: $X_1 \to y_1^*(x_1) \xrightarrow{(5)} X_2 \to y_2^*(X_2) \to \cdots$

<u>Επιστροφή στο παράδειγμα 2, και εφαρμογή:</u>

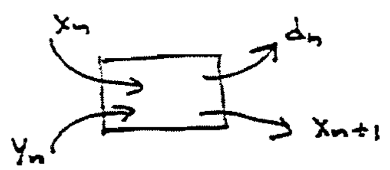
(1) $n =$ ο n-οστός μήνας $(n = 1, \ldots, 12)$

(2) $X_n \equiv$ ύψος αποθέματος βαλβίδων στην αρχή του n-οστού μήνα. $\left(0 \le X_n \le \sum_{i=n}^{12} d_i = D_n\right)$ (η καταγραφή των ορίων του X_n είναι χρήσιμη για υπολογιστικούς λόγους)

(3) $V_n(X_n) \equiv$ Ελάχιστο συνολικό κόστος από το n-οστό μήνα μέχρι το τέλος, εάν στην αρχή του n-οστού μήνα το απόθεμα βαλβίδων είναι X_n.

(4) $y_n \equiv$ πόσες βαλβίδες θα παραγγελθούν το μήνα n. $(y_n \ge 0,\ y_n \le D_n - X_n,\ y_n \ge d_n - X_n)$ (και εδώ αφαιρούμε τα όρια για υπολογιστικούς λόγους)

(5)



$$\Rightarrow X_{n+1} = X_n + Y_n - d_n$$

(6) Ενδιάμεσο κόστος από n σε $n+1$:

$$= 5(\underbrace{X_n + Y_n - d_n}_{\text{αριθμός αποθηκευμένων βαλβίδων από } n \text{ σε } n+1}) + \begin{cases} 0 & \text{αν } y_n = 0 \\ 100 + 150 y_n & \text{αν } y_n > 0 \end{cases}$$

(7) $$V_n(X_n) = \min_{\underbrace{\le Y_n \le}} \left[5(X_n + Y_n - d_n) + \begin{Bmatrix} 0 & \text{αν } Y_n = 0 \\ 100 + 150 Y_n & \text{αν } Y_n > 0 \end{Bmatrix} + V_{n+1}(X_n + Y_n - d_n) \right]$$

↳ όρια που ορίσαμε στο (4)

(8) $V_{13}(X_{13}) = 0$ με $X_{13} = 0$ (αριθμός βαγονιών στο τέλος του 12ου μήνα)

(9) Λύση :

<u>$n=12$</u>

$0 \le X_{12} \le 6$

$Y_{12} = 6 - X_{12}$ (δεν υπάρχει επιλογή)

$$\Rightarrow V_{12}(X_{12}) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{αν } X_{12} = 6 \\ 100 + 150(6 - X_{12}) & \text{αν } X_{12} < 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$V_{12}(0) = 1000$ $\quad Y^*_{12}(0) = 6$

$V_{12}(1) = 850$ $\quad Y^*_{12}(1) = 5$

$V_{12}(2) = 700$ $\quad Y^*_{12}(2) = 4$

$V_{12}(3) = 550$ $\quad Y^*_{12}(3) = 3$

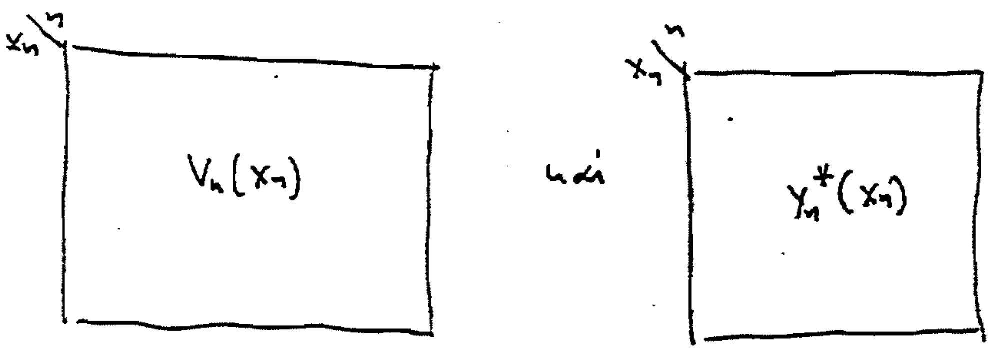
$V_{12}(4) = 400$ $\quad Y^*_{12}(4) = 2$

$V_{12}(5) = 250$ $\quad Y^*_{12}(5) = 1$

$V_{12}(6) = 0$ $\quad Y^*_{12}(6) = 0$

Κατόπιν προχωρούμε στο <u>$n=11$</u>, μετά στο $n=10$, ... κ.ο.κ. μέχρι το <u>$n=1$</u>.

Σχηματίζουμε 2 πίνακες :



(10) Ξεκινώντας ἀπό τήν ἀρχική συνθήκη $X_1 = 0$, καί βασιζόμενοι στόν πίνακα $y_n^*(X_n)$, ἀναγνωρίζομε τή βέλτιστη σειρά, ὡς ἑξῆς:

$X_1 = 0 \Rightarrow y_1^*(0) = \_\_ \Rightarrow X_2 = X_1 + y_1^*(0) - d_1 = \_\_$

$\Rightarrow y_2^*(\cdot) = \_\_ \Rightarrow X_3 = \cdots$ κ.ο.κ. (βλ. καί ἀσκήσεις/σειρά 3)

Παράδειγμα 3 (Βέλτιστη φόρτωση πλοίου)

Ἔστω πλοῖο χωρητικότητας $W = 9000$ τόννων, καί 4 κατηγορίες ἐμπορευμάτων μέ τά ἑξῆς χαρακτηριστικά

Κατηγορία (i)	Βάρος τεμαχίου (w_i)	Κέρδος μεταφορᾶς (v_i)
1	3000	7000
2	6000	16 000
3	7000	19 000
4	5000	15 000

ὅπου τό "κέρδος" εἶναι ἀνά τεμάχιο..

Πρόβλημα: Πόσα τεμάχια ἀπό κάθε κατηγορία μποροῦν νά φορτωθοῦν στό πλοῖο ὥστε τό ὁλικό κέρδος μεταφορᾶς (σέ 1 ταξίδι) νά μεγιστοποιηθεῖ, χωρίς ὑπέρβαση τῆς χωρητικότητας;

Ἐπίλυση μέ δυναμικό προγραμματισμό: Τό πρόβλημα ἐκ πρώτης ὄψεως δέν εἶναι πρόβλημα σειρᾶς ἀποφάσεων, ἀλλά μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ τέτοιο. Ἔστω ὅτι φορτώνουμε ἕνα τεμάχιο τή φορά. Ὁρίζομε μεταβλητή κατάστασης τό w, τό ὑπόλοιπο τῆς διαθέσιμης χωρητικότητας σέ κάποια ἐνδιάμεση φάση τῆς διαδικασίας. (Μετρᾶμε τό w σέ χιλιάδες)

Ἔστω ἐπίσης $f(w)$ τό μέγιστο ἐπιπλέον κέρδος συναρτήσει τῆς w. (Μετρᾶμε καί τό f σέ χιλιάδες)

Τότε εἶναι σαφές ὅτι ἰσχύει ἡ ἑξῆς σχέση:

$$f(w) = \max_{\substack{i=1,\dots,4 \\ w_i \le w}} \left[v_i + f(w - w_i) \right]$$

νέα υπολοιπόμενη χωρητικότητα (σε χιλιάδες)

ενδιάμεσο κέρδος από τη φόρτωση τεμαχίου κατηγορίας i (σε χιλιάδες)

Οριακή συνθήκη: $f(w) = 0$ για $0 \le w < 3$

Υπολογισμοί:

w	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f(w)$	23	22	19	16	15	7	7	0	0	0
i^*	1(2)	1(4)	3	2	4	1	1	–	–	–

← (βέλτιστο επόμενο τεμάχιο)

← ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

(όπου σε παρένθεση παρατίθενται εναλλακτικές βέλτιστες επιλογές)

⇒ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΦΟΡΤΩΣΗ:

Αρχική συνθήκη $w = 9 \Rightarrow i^* = 1$ (φορτώνουμε τεμάχιο #1)

$\Rightarrow w = 9 - 3 = 6 \Rightarrow i^* = 2$ (φορτώνουμε τεμάχιο #2)

$\Rightarrow w = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ ΤΕΛΟΣ. Μέγιστο κέρδος $= f(9) = 23$ (χιλιάδες).

<u>Σημείωση</u>: Στο πρόβλημα αυτό, ο ορισμός της μεταβλητής σταδίου <u>δεν</u> είναι αναγκαίος.

<u>Παράδειγμα 4</u> (Πρόβλημα Βέλτιστης Κυκλικής Διαδρομής Πλοίου, ή Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή)

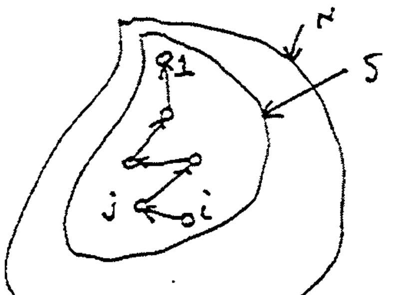
Έστω δίκτυο (νησιών) με n κόμβους. Η απόσταση c_{ij} μεταξύ κάθε ζεύγους (i,j) είναι γνωστή (και εν γένει $c_{ij} \neq c_{ji}$). Πλοίο ξεκινάει από τον κόμβο 1, επισκέπτεται κάθε ένα από τα νησιά (από 1 φορά) και επιστρέφει στον κόμβο 1.

Ποιά εἶναι ἡ σειρά ἐπισκέψεων πού ἐλαχιστοποιεῖ τήν ὁλική ἀπόσταση πού θά διανύσει τό πλοῖο;

Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι πολύ σημαντικό στήν Ἐπιχειρησιακή Ἔρευνα (ὅπως καί στούς τομεῖς τῶν Μαθηματικῶν, Πληροφορικῆς κλπ) καί ὀνομάζεται τό Πρόβλημα τοῦ Πλανόδιου Πωλητῆ (Traveling Salesman Problem).
Εἶναι σημαντικό <u>καί</u> ἀπό θεωρητική, <u>καί</u> ἀπό πρακτική πλευρά.
Ἀπό θεωρητικῆς, γιατί εἶναι ἀπό τά πιό "δύσκολα" προβλήματα συνδυαστικῆς βελτιστοποίησης. Ἀπό πρακτικῆς, γιατί ἐμφανίζονται σάν ὑποπρόβλημα σέ πολλά προβλήματα στίς μεταφορές (διανομή προϊόντων, δρομολόγηση ὀχημάτων, κλπ).

<u>Ἐπίλυση μέ Δυναμικό Προγραμματισμό:</u> (Held + Karp, 1962)

Ἄν $N=\{1,2,\dots,n\}$, ἔστω $S\subseteq N$, μέ $i\in S$. Ἔστω ἐπίσης $i\in S$



Ὁρίζεται τότε ὡς $V(i,S)$ = ἐλάχιστο δυνατό μῆκος διαδρομῆς πού ξεκινάει ἀπό τό i, ἐπισκέπτεται ὅλους τούς ἄλλους κόμβους τοῦ S, καί καταλήγει στόν κόμβο 1.
Τότε, ἄν j εἶναι ὁ ἄριστος ἑπόμενος κόμβος στήν ὡς ἄνω διαδρομή, εἶναι σαφές ὅτι τό V ἱκανοποιεῖ τήν ἑξῆς ἀναγωγική σχέση:

$$V(i,S) = \min_{j\in S-\{i\}} \left[c_{ij} + V(j, S-\{i\}) \right]$$

μέ ὁριακή συνθήκη: $V(1,\{1\})=0$

Τότε τό ζητούμενο ἐλάχιστο μῆκος κυκλικῆς διαδρομῆς εἶναι $V(1,N)$.

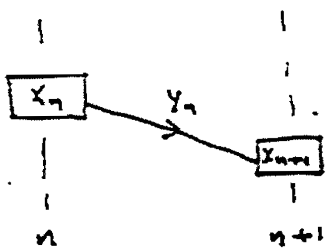
Ἡ πιό πάνω σχέση εἶναι σχετικά ἁπλῆ, πάντως τό ὑπολογιστικό κόστος υλοποίησης της (χρόνος CPU) είναι $O(n^2 2^n)$, η δε απαιτούμενη μνήμη $O(n2^n)$. Αυτά είναι μέν πολύ καλύτερα από τα αντίστοιχα μεγέθη για επίλυση με ολική απαρίθμηση (χρόνος $O((n-1)!)$), αλλά καθιστούν δύσκολη την εφαρμογή του αλγορίθμου για $n > \simeq 15$.

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Από τις διάφορες μεθόδους βελτιστοποίησης, ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ίσως μοναδικός στο ότι μπορεί άμεσα να περιλάβει αβεβαιότητα, χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές.

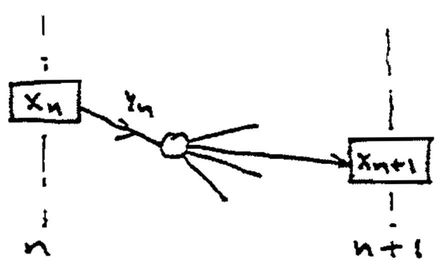
Η βασική διαφορά μεταξύ βεβαιότητας και αβεβαιότητας έγκειται στο ότι ενώ

υπό ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ



$x_{n+1} = f_n(x_n, Y_n)$,

υπό ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ



$x_{n+1} = f_n(x_n, Y_n, w_n)$

↑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Η θεώρηση γίνεται με την παραδοχή της <u>ουδέτερης</u> αντιμετώπισης του ρίσκου, με όλες τις επιφυλάξεις που ήδη κάναμε (κεφ. 2) για το αν ακριβώς συνεπάγεται αυτή η παραδοχή. Εάν <u>δεν</u> ισχύει αυτή η παραδοχή, τότε η επίλυση με δυναμικό προγραμματισμό γίνεται σημαντικά πιο δύσκολη.

Ἀλλαγές στή βασική μεθοδολογία ΔΠ

Ἐάν ἐξετάσει κανείς τά 10 βήματα ἐπίλυσης ἑνός προβλήματος μέ ΔΠ, οἱ ἀλλαγές ὑπό συνθῆκες ἀβεβαιότητας εἶναι λίγες, πλήν ὅμως σημαντικές. Μέ → σημειώνονται τά βήματα πού παρουσιάζουν ἀλλαγές:

(1) n

→ (1,5) (νέο βῆμα): Ὁρισμός τυχαίων μεταβλητῶν w_n

(2) x_n

→ (3) $V_n(x_n)$: ὁρίζεται σάν ἡ βέλτιστη <u>προσδοκώμενη</u> τιμή ..." κλπ

(4) y_n

→ (5) $x_{n+1} = f_n(x_n, y_n, w_n)$

(6) Ἐπί πλέον κόστος

→ (7) Στό β' μέλος τῆς ἐπαναληπτικῆς σχέσης, παίρνουμε τήν προσδοκώμενη τιμή: E[....], καί <u>μετά</u> παίρνουμε τό min (ἤ max)

(8): Ὁριακές συνθῆκες

(9): Ἐπίλυση: Σχηματισμός πινάκων $V_n(x_n)$ καί $y_n^*(x_n)$

→ (10) (μεγαλύτερη διαφορά): Ἐνῶ ὑπό συνθῆκες βεβαιότητας στό (10) μποροῦσε νά προσδιοριστεῖ ἡ <u>ὅλη</u> σειρά τῶν ἀποφάσεων, ὑπό συνθῆκες ἀβεβαιότητας ὁ πίνακας $y_n^*(x_n)$ μπορεῖ νά δώσει μόνο μιά <u>στρατηγική</u> (πολιτική) ἀποφάσεων. Ἡ σειρά τῶν καταστάσεων πού πραγματικά θά ἐμφανισθοῦν $(x_1, x_2, \dots)$ θά ἐξαρτηθεῖ <u>καί</u> ἀπό τήν τύχη.

<u>Παράδειγμα 5</u> (ἔλεγχος ἀποθεμάτων ὑπό ἀβεβαιότητα)

Αὐτό εἶναι παραλλαγή τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, μόνο πού τώρα ἡ d_n εἶναι τυχαία μεταβλητή, μέ γνωστή κατανομή πιθανότητας $p_n(d_n)$. Υποθέτουμε ὅτι ἡ d_n παίρνει διακριτές τιμές, καί ὅτι οἱ d_n εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους. Ἐπίσης ὑποθέτομε ὅτι ἡ πραγματική τιμή τῆς d_n γίνεται γνωστή ἀφοῦ δώσομε τήν παραγγελία y_n στήν ἀρχή τοῦ μήνα n.

Λόγω ἀβέβαιης ζήτησης, ὑπάρχει πάντα τό ἐνδεχόμενο νά ὑπάρξει ἀνικανοποίητη ζήτηση, δηλαδή νά συμβεῖ

$x_n + y_n < d_n$, κάποιο συγκεκριμένο μήνα.

Ὑποθέτομε ὅτι ἡ ἀνικανοποίητη ζήτηση ἔχει κάποιο κόστος, ἴσο μέ \$300 ἀνά τεμάχιο τοῦ ὁποίου ἡ ζήτηση δέν ἱκανοποιεῖται.

Προφανῶς, ἄν $x_n + y_n < d_n$, τότε $x_{n+1} = 0$, ἑπομένως ἡ προηγούμενη σχέση $x_{n+1} = x_n + y_n - d_n$ δέν ἰσχύει ἐδῶ, ἀλλά ἰσχύει ἡ

$$x_{n+1} = \max(0, x_n + y_n - d_n).$$

Τώρα, τό ἐνδιάμεσο κόστος ἔχει 3 κατηγορίες:

(α) ὅπως πρίν, τό κόστος παραγγελιῶν $\begin{cases} 0 & \text{ἄν } y_n = 0 \\ 100 + 150 y_n & \text{ἄν } y_n > 0 \end{cases}$

(β) ὅπως πρίν, τό κόστος ἀποθεμάτων $\begin{cases} 5(x_n + y_n - d_n) & \text{ἄν } x_n + y_n - d_n \geq 0 \\ 0 & \text{ἄν } \quad -''- \; < 0 \end{cases}$

καί (γ) τό κόστος ἀνικανοποίητης ζήτησης $\begin{cases} 300(d_n - x_n - y_n) & \text{ἄν } d_n - x_n - y_n \geq 0 \\ 0 & \text{ἄν } \quad -''- \; < 0 \end{cases}$

Σέ ἀντίθεση μέ τήν προηγούμενη περίπτωση, τώρα ὑπάρχει περίπτωση νά ὑπάρξει ἔξτρα ἀπόθεμα στό τέλος τοῦ 12-ου μήνα. Ὑποθέτομε ὅτι σέ τέτοια περίπτωση μποροῦμε νά πουλήσομε τά ἔξτρα μέ κέρδος \$100/τεμάχιο.

Τό κριτήριο βελτιστοποίησης εἶναι ἡ ἐλαχιστοποίηση τοῦ συνολικοῦ προσδοκώμενου κόστους.

Ἔστω ὁρίζομε σάν $V_n(X_n)$ = ἐλάχιστο συνολικό προσδοκώμενο κόστος ἀπό τό μῆνα n ἕως τό τέλος τῆς διαδικασίας, <u>ἐάν</u> στήν ἀρχή τοῦ μῆνα n τό ἀπόθεμα εἶναι X_n.

Ἡ ἐπαγωγική σχέση γίνεται τότε:

$$V_n(X_n) = \min_{Y_n \geq 0} \sum_{d_n=0}^{\infty} p_n(d_n) \Big[\begin{Bmatrix} 0 & \text{ἄν } Y_n = 0 \\ 100+150\,Y_n & \text{ἄν } Y_n > 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} +5\max(0, X_n+Y_n-d_n) \\ +300\max(0, d_n-X_n-Y_n) \end{matrix} +$$

$$+ \; V_{n+1}\left(\max(0, X_n+Y_n-d_n)\right) \Big]$$

μέ ὁριακή συνθήκη $V_{13}(X_{13}) = -100\,X_{13}$

<u>Σημειώσεις</u>:

(1) Ὅπως φαίνεται, τό ὑπολογιστικό φορτίο ἐπίλυσης τῆς πιό πάνω ἐπαγωγικῆς σχέσης εἶναι ἀρκετά πιό μεγάλο ἀπό ἐκεῖνο τοῦ ἀντίστοιχου προβλήματος ὑπό συνθῆκες βεβαιότητας. Ὄχι μόνο ὑπάρχει ἡ ἄθροιση γιά τόν ὑπολογισμό τῆς προσδοκώμενης τιμῆς, ἀλλά ἐπίσης καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν X_n, Y_n δέν εἶναι τόσο καλά ὁρισμένα ὅπως πρίν.

(2) Ἐάν ἡ παραδοχή τῆς οὐδέτερης ἀντιμετώπισης τοῦ ρίσκου <u>δέν</u> ἰσχύει, τότε τά πράγματα γίνονται ἀκόμα πιό δύσκολα, τουλάχιστον ὑπολογιστικά. Καί αὐτό διότι θά πρέπει νά περιλάβουμε σάν ἐπί πλέον μεταβλητή κατάστασης <u>καί</u> τήν περιουσιακή κατάσταση τοῦ λήπτη τῶν ἀποφάσεων. Μιά τέτοια θεώρηση ξεφεύγει κάπως ἀπό τά ὅρια τοῦ παρόντος.

4. ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΝΑΥΛΑΓΟΡΑ CHARTER

4.1 : Τό πρόβλημα απόφασης του ανεξάρτητου πλοιοκτήτη

Συνδυάζουμε τώρα τίς πιό πάνω θεωρήσεις μέ τά στοιχεία δυναμικού προγραμματισμού πού παραθέσαμε πιό πρίν, γιά τό πρόβλημα απόφασης του "ανεξάρτητου πλοιοκτήτη". Ανεξάρτητος πλοιοκτήτης είναι ό μεταφορέας πού δέν έχει δικές του μεταφορικές απαιτήσεις. Στή ναυλαγορά tankers, τό μεγαλύτερο τών πλοίων ανήκουν σέ ανεξάρτητους, ενώ τά υπόλοιπα ανήκουν στίς εταιρείες πετρελαίου. Θά κάνουμε τίς εξής απλουστευτικές παραδοχές:

- Ο πλοιοκτήτης έχει 1 δεξαμενόπλοιο, τό οποίο χρησιμοποιεί σέ 1 διαδρομή μόνο (πχ Περσικός Κόλπος → Ευρώπη).
- Η διάρκεια του ταξιδιού (μέ επιστροφή) είναι σταθερή, καί ίση μέ T (μήνες).
- Κάθε T μήνες, ό πλοιοκτήτης λαμβάνει υπ' όψη του τίς συνθήκες πού επικρατούν στήν αγορά, καί αποφασίζει πώς θά διαθέσει τό πλοίο του γιά τούς επόμενους T μήνες (βλ. καί κατωτέρω).
- Ο πλοιοκτήτης έχει ουδέτερη αντιμετώπιση του ρίσκου.
- Τό κριτήριο του πλοιοκτήτη είναι ή μεγιστοποίηση της προεξοφλημένης καθαρής παρούσας αξίας γιά τήν οικονομική ζωή του πλοίου.

Βέβαια, πολλές από τίς παραδοχές μπορεί νά είναι αρκετά περιοριστικές (πχ ή παραδοχή γιά τό ρίσκο). Έτσι, τό μοντέλο πού θά αναπτυχθεί είναι κατ' ανάγκη απλουστευμένο. Περισσότερες παραδοχές θά παρατεθούν σταδιακά στή συνέχεια.

Οι <u>επιλογές</u> του πλοιοκτήτη εξαρτώνται από τήν κατάσταση του πλοίου τή στιγμή της απόφασης.

Ἔτσι,

① ἄν τό πλοῖο εἶναι παροπλισμένο, τότε ὁ πλοιοκτήτης μπορεῖ

ⓐ νά τό ἀφήσει παροπλισμένο,

ⓑ νά τό ἐνεργοποιήσει ὥστε νά εἶναι λειτουργικά ἕτοιμο τήν ἑπόμενη περίοδο,

ⓒ νά τό δώσει γιά διάλυση (παλιοσίδερα),

ⓓ νά τό πουλήσει, ἤ

ⓔ νά τό μισθώσει σέ μελλοντικό ναῦλο (forward charter).

Αὐθαίρετα δεχόμαστε ὅτι οἱ ἐπιλογές ⓓ καί ⓔ δέν θά ἐξετασθοῦν ἐδῶ.

② ἄν τό πλοῖο εἶναι σέ λειτουργική κατάσταση καί ὄχι ἤδη ναυλωμένο, τότε μπορεῖ

ⓐ νά τό ναυλώσει γιά m περιόδους (ὅπου τό $m=1$ σημαίνει SPOT),

ⓑ νά ἀναμένει μέχρι τήν ἑπόμενη περίοδο,

ⓒ νά τό παροπλίσει, ἤ

ⓓ νά τό δώσει γιά διάλυση.

Τέλος,

③ ἄν τό πλοῖο εἶναι στό μέσο χρονοναύλωσης ἤ ἔχει ἤδη διαλυθεῖ, τότε ὁ πλοιοκτήτης δέν ἔχει καμμία ἐπιλογή.

Ἄν M εἶναι ἡ μέγιστη διάρκεια χρονοναύλωσης (σέ ἀριθμό ταξιδιῶν), τότε ὁρίζουμε σάν X_n τήν "κατάσταση" τοῦ πλοίου στήν ἀρχή τῆς χρονικῆς περιόδου n, ὡς ἑξῆς:

$$X_n = \begin{cases} -2 : & \text{πλοῖο εἶναι ἤδη παλιοσίδερα} \\ -1 : & \text{— " — παροπλισμένο} \\ 0 : & \text{— " — σέ λειτουργική κατάσταση \& ἕτοιμο γιά ναύλωση} \\ k\ (1 \le k \le M-1): & \text{πλοῖο στό μέσο χρονοναύλωσης, μέ } k \text{ ὑπολειπόμενα ταξίδια.} \end{cases}$$

Εκτός από την κατάσταση του πλοίου, χρειαζόμαστε καί κάποια στοιχεία πού νά απεικονίζουν την κατάσταση της ναυλαγοράς. Μιά ιστορικώς υπερ-απλουστευμένη θεώρηση υποθέτει ότι ή τελευταία μπορεί νά παρασταθεί μέσω των εξής 2 παραμέτρων:

- Τό ύψος του στιγμιαίου ναύλου $R_1(n)$ στην αρχή της περιόδου n
- Τό ρυθμό μεταβολής του στιγμιαίου ναύλου $\Delta R_1(n) \equiv R_1(n) - R_1(n-1)$.

(Σημ: Κατά τό Zannetos, ή κατάσταση της ναυλαγοράς περιγράφεται πιό λεπτομερώς μέ μερικές ακόμα παραμέτρους. Ή θεώρησή τους ξεφεύγει από τά όρια του παρόντος).

Χρειαζόμαστε επίσης κάποια πληροφόρηση γιά τό ύψος του ναύλου προθεσμίας m ταξιδίων μέ αρχή την χρονική περίοδο n ($R_m(n)$). Καί εδώ δεχόμαστε ότι τό R_m είναι γνωστή συνάρτηση των $R_1, \Delta R_1$ καί m (καί ότι εκφράζεται μέ τις ίδιες μονάδες μέ τό R_1 – βλ. §4.3.2)

Άλλες συναρτήσεις τις οποίες υποθέτουμε γνωστές:

$B(n)$: Καθαρή αξία διάλυσης πλοίου στό στάδιο n

$C_L(n)$: (Σταθερό) κόστος παροπλισμού στό στάδιο n

$C_M(n)$: (Μεταβλητό) κόστος συνεχιζόμενου παροπλισμού στό στάδιο n

$C_R(n)$: Κόστος ενεργοποίησης στό στάδιο n

$C_H(n)$: Κόστος έρμου αναφοράς από n στό $n+1$

$C_V(n,m)$: Παρούσα αξία κόστους χρονοναύλωσης m περιόδων πού ξεκινάει στό στάδιο n.

Άν NT είναι ή οικονομική διάρκεια ζωής του πλοίου, αυθαίρετα υποθέτουμε ότι στό στάδιο N τό πλοίο θά δοθεί γιά διάλυση, εκτός άν έχει ήδη γίνει αυτό προηγουμένως.

Μέ βάση τά ανωτέρω, ή μεταβλητή σταδίου n είναι ($n \leq N$) ή περίοδος στην οποία λαμβάνεται ή απόφαση, ή δέ

μεταβλητή κατάστασης εἶναι τό διάνυσμα $(X_n, R_1(n), \Delta R_1(n))$.
Ὁρίζουμε σάν συνάρτηση βέλτιστης τιμῆς τήν $W_n(X, R_1, \Delta R_1)$ = μέγιστη προσδοκώμενη καθαρή παρούσα ἀξία ἀπό τή λειτουργία τοῦ πλοίου ἀπό τό στάδιο n μέχρι τό τέλος τῆς οἰκονομικῆς του ζωῆς, ἐάν στήν ἀρχή τῆς περιόδου n ἡ κατάσταση τοῦ πλοίου καί τῆς ναυλαγορᾶς περιγράφονται ἀπό τό διάνυσμα $(X, R_1, \Delta R_1)$.

<u>Ὁ ρόλος τῆς ἀβεβαιότητας</u>: Προφανῶς, τό πρόβλημά μας εἶναι κάτω ἀπό συνθῆκες ἀβεβαιότητας. Ἔτσι, ἀκόμα καί ἄν ξέρουμε τά $R_1, \Delta R_1$ στό στάδιο n, δέν εἴμαστε ἀπόλυτα σίγουροι γιά τίς τιμές τους στό στάδιο n+1. Ἐδῶ θά υποθέσουμε ὅτι οἱ πιθανότητες $p[R_1(n+1) | R_1(n), \Delta R_1(n)]$ εἶναι <u>γνωστές</u> γιά ὅλες τίς δυνατές τιμές τῶν R_1 καί ΔR_1! (<u>Σημ</u>: Ἡ μελέτη τοῦ Ζαννέτου προσδιόρισε κατά προσέγγιση αὐτές τίς πιθανότητες ἀπό ἱστορικά στοιχεῖα). Γιά υπολογιστική συντομία, υποθέτουμε ἀκόμα ὅτι τό R_1 (ἄρα καί τό ΔR_1) παίρνει διακριτές τιμές (πχ \$5/ton, \$10/ton, κλπ).

Εἴμαστε τώρα σέ θέση νά ἀναπτύξουμε τήν ἐπαγωγική σχέση βελτίστου στίς κάτωθι περιπτώσεις:

① Ἄν $X_n = -2 \Rightarrow$ καμμιά ἐπιλογή $\Rightarrow W_n(-2, R_1, \Delta R_1) = 0$ γιά κάθε R_1 καί ΔR_1.

② Ἄν $X_n = -1$ (παροπλισμένο), τότε

$$W_n(-1, R_1(n), \Delta R_1(n)) = \max \begin{cases} B(n) \\ -C_M(n) + \rho E\left[W_{n+1}(-1, R_1(n+1), \Delta R_1(n+1)) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right] \\ -C_R(n) + \rho E\left[W_{n+1}(0, R_1(n+1), \Delta R_1(n+1)) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right] \end{cases}$$

ὅπου $\rho = \frac{1}{1+i}$ ← ἐπιτόκιο ἀναγωγῆς, καί

$$E\left[W_{n+1}(X_{n+1}, R_1(n+1), \Delta R_1(n+1)) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right] \equiv$$

$$= \sum_{R_1(n+1)} p\left[R_1(n+1) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right] \cdot W_{n+1}\Big(X_{n+1}, R_1(n+1), \underbrace{R_1(n+1) - R_1(n)}_{\Delta R_1(n+1)}\Big)$$

(Σημ: ὁ παράγοντας ρ (= συντελεστὴς ἔκπτωσης) ὑπεισέρχεται γιατί τὸ κριτήριο ἀφορᾶ τὴν καθαρὴ παροῦσα ἀξία)

③ Ἄν $X_n = 0$ (ἐνεργὸς ἀναμονή), τότε

$$W_n\big(0, R_1(n), \Delta R_1(n)\big) = \max_{m=1,\dots,M} \begin{cases} B(n) \\ -C_L(n) + \rho E\left[W_{n+1}(-1, R_1(n+1), \Delta R_1(n+1)) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right] \\ -C_H(n) + \rho E\left[W_{n+1}(0, \text{—''—} \quad \text{—''—} \quad \text{—''—})\right] \\ \boxed{} + \rho E\left[W_{n+1}(m-1, \text{—''—} \quad \text{—''—} \quad \text{—''—})\right] \end{cases}$$

προσδοκώμενη καθαρὴ παροῦσα ἀξία ἀπὸ ναύλωση m ταξιδιῶν =

$$= W \cdot R_m(R_1(n), \Delta R_1(n)) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k - C_V(n, m)$$

(τόνος-φορτίο)

④ Ἄν $X_n \geq 1$, τότε τὸ πλοῖο εἶναι σὲ μέση χρονοναύλωσης μὲ X_n ὑπολοιπόμενα ταξίδια ⇒ καμμία ἐπιλογή!

Τότε $W_n(X_n, R_1(n), \Delta R_1(n)) = \rho E\left[W_{n+1}(X_n - 1, R_1(n+1), \Delta R_1(n+1)) \,\middle|\, R_1(n), \Delta R_1(n)\right]$

<u>Σημείωση</u>: Ἀπὸ τὰ ③, ④ φαίνεται ὅτι σὲ περίπτωση χρονοναύλωσης, λαμβάνομε ὑπ' ὄψη τὸ <u>ΟΛΙΚΟ</u> καθαρὸ κέρδος ἀπὸ τὴ χρονοναύλωση αὐτή, <u>τὴ στιγμὴ ποὺ παίρνουμε τὴν ἀντίστοιχη ἀπόφαση</u>. Αὐτὸ γίνεται στὸ ③, καὶ ὡς ἐκ τούτου <u>δὲν</u> μπορεῖ νὰ ξαναγίνει στὸ ④, στὸ ὁποῖο ἄλλωστε δὲν ἔχομε ἐπιλογή.

<u>Ὁριακὲς συνθῆκες</u>:

Γιὰ $n = N$, $W_N(-2, R_1, \Delta R_1) = 0$

καὶ $W_N(X \neq -2, R_1, \Delta R_1) = B(N)$

Συμπληρωματικές παρατηρήσεις.

1) Παρά τίς ἀπλουστεύσεις, εἶναι σαφές ὅτι ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος ἀπόφασης τοῦ ἀνεξάρτητου πλοιοκτήτη εἶναι ἀρκετά δύσκολη. Πρῶτον, ὑποθέτει ὅτι εἶναι γνωστές οἱ διάφορες πιθανότητες $p[*|*,*]$. Δεύτερον, ἡ ἐπίλυση ἔχει ἀρκετά μεγάλο ὑπολογιστικό κόστος. Π.χ., ἄν $|\hat{X}_n|=20$ (δηλ. τό X_n μπορεῖ νά πάρει 20 διαφορετικές τιμές – κάτι πού ἀντιστοιχεῖ σέ $M=18$, δηλ. μέγιστη διάρκεια ναύλου 3 χρόνια ἄν $T=2$ μῆνες), ἄν $|\hat{R}_1|=10$, $|\Delta\hat{R}_1|=10$, καί $N=90$, τότε ἡ ἀπαιτούμενη μνήμη εἶναι 180.000 θέσεις, ἐπί 4 bytes/θέση, ἤ 0,72 MB γιά κάθε ἕνα ἀπό τά W_n καί Y_n^*!

2) Τό πρόβλημα ἐπιλύεται ἀκόμα πιό δύσκολα ἄν ὁ πλοιοκτήτης δέν ἔχει οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου. Μελέτες ἔδειξαν ὅτι οἱ ἀνεξάρτητοι πλοιοκτῆτες δέν φαίνεται νά ἔχουν ἰδιαίτερα μεγάλο φόβο ρίσκου, κάτι πού δέν ἰσχύει μέ τίς ἑταιρεῖες πετρελαίου πού ἔχουν πλοῖα σέ ναυλαγορά.

3) Γιά περισσότερα ἀπό 1 πλοῖα, τό πρόβλημα γίνεται ἀκόμα πιό δύσκολο. Ἄν V_k εἶναι ἡ προσδοκώμενη καθαρή παροῦσα ἀξία τοῦ πλοίου k, τότε μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι τά προβλήματα

$$\max\left(V_1+V_2+\cdots+V_k\right), \text{ καί}$$

$$\max V_1+\max V_2+\cdots+\max V_k$$

εἶναι ἰσοδύναμα ἐάν (α) ὑπάρχει οὐδέτερη ἀντιμετώπιση τοῦ ρίσκου καί (β) τέλεια ἀγορά κεφαλαίου. Τό (β) σημαίνει ὅτι ὁ πλοιοκτήτης ἔχει ἀπεριόριστη δανειοληπτική δύναμη καί ἔτσι δέν ἀντιμετωπίζει προβλήματα ρευστότητας ἤ κατανομῆς τῶν πόρων του μεταξύ τῶν πλοίων. Μελέτες ἔδειξαν ὅτι ὑπάρχει διαφοροποίηση ὡς πρός τά (α) & (β) μεταξύ ἀνεξάρτητων πλοιοκτητῶν καί ἑταιρειῶν πειραιαίου, ἀλλά καί οἱ 2 (γιά διαφορετικούς λόγους) προτιμοῦν νά χρησιμοποιοῦν τά πλοῖα τῶν στόλων τους κατά 'μεικτό' τρόπο, δηλ. μερικά στή στιγμιαία ναυλαγορά, μερικά σέ χρονοναύλωση, κτλ. Μιά μεικτή χρήση δικαιολογεῖται μόνο ἄν μία τῶν παραδοχῶν (α) ἤ (β) ἀνωτέρω (ἤ καί οἱ 2) δέν ἰσχύει.